正2面体群 D_{2n} および一般4元数群 Q_{4m} の既約表現

いーふ (@y_e_af)

表現と言ったら，$\mathbb{C}$ 上の有限次線型表現を意味する．

群の元 x に対して $C(x)$ で x の共役類を表わす．また，群 G に対して $D(G)$ で G の交換子群 $[G,G]$ を表わす．また，群環 $\mathbb{C}[G]$ の元 f,g に対して，その内積を

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)}$$

で表わす．χ を表現 ρ の指標とするとき，よく知られているように，

$$\rho \text{ が既約} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \chi,\chi\rangle = 1$$

である．

1　正2面体群 D_{2n} の既約表現

Definition

正2面体群とは，表示

$$D_{2n} = \langle \sigma,\tau : \sigma^n = \tau^2 = 1,\ \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1}\rangle$$

で与えられる群である．

Lemma

D_{2n} の共役類の完全代表系として，n が偶数ならば

$$1,\ \sigma^i\left(i = 1,...,\frac{n}{2}\right),\ \tau,\ \sigma\tau$$

がとれ，n が奇数ならば

$$1,\ \sigma^i\left(i = 1,...,\frac{n-1}{2}\right),\ \tau$$

がとれる．

Proof

基本関係式を用いて実際に計算すればよい．$C(1)=\{1\}$ は自明．また，

$$\sigma^{-1}\sigma^{i}\sigma=\sigma^{i}\ ,\ \tau^{-1}\sigma^{i}\tau=(\tau^{-1}\sigma\tau)^{i}=a^{-i}$$

より，$C(\sigma^{i})=\{\sigma^{i},\sigma^{-i}\}$ である．さらに，

$$\sigma^{-1}\tau\sigma=\sigma^{-2}\tau\ ,\ \tau^{-1}\tau\tau=\tau\ ,\ \sigma^{-1}\sigma\tau\sigma=\sigma^{-1}\tau\ ,\ \tau^{-1}\sigma\tau\tau=\sigma^{-1}\tau$$

より，n が偶数ならば

$$C(\tau)=\left\{\sigma^{2i}\tau : i=0,...,\frac{n}{2}\right\}\ ,\ C(\sigma\tau)=\left\{\sigma^{2i+1}\tau : i=0,...,\frac{n}{2}\right\}$$

であり，n が奇数ならば

$$C(\tau)=\left\{\sigma^{2i}\tau : i=0,...,n-1\right\}=\left\{\sigma^{i}\tau : i=0,...,n-1\right\}$$

となる．

□

Lemma

D_{2n} の交換子群は，

$$D(D_{2n})=\langle\sigma^{2}\rangle\cong\begin{cases}C_{\frac{n}{2}} & (n:\text{偶数})\\ C_{n} & (n:\text{奇数})\end{cases}$$

となる．

Proof

計算すればよい．実際，$i,j\in\{0,...,n\}$ に対して，

$$[\sigma^{i},\sigma^{j}]=1\ ,\ [\sigma^{i},\sigma^{j}\tau]=\sigma^{-2i}\ ,\ [\sigma^{i}\tau,\sigma^{j}\tau]=\sigma^{-2(i-j)}$$

であることから従う．

互いに同型でない D_{2n} の $\mathbb{C}$ 上の既約表現を与えよう．

まず，1 次表現 (1 次指標) を決定する．一般に，任意の 1 次表現の核は交換子群を含むので，元の群の 1 次表現と Abel 化は 1 対 1 に対応する．

n が偶数のとき，

$$D_{2n}/D(D_{2n})=\langle\bar{\sigma}\rangle\times\langle\bar{\tau}\rangle\cong C_{2}\times C_{2}$$

である．従って，

$$
\begin{aligned}
1_{D_{2n}} &: \sigma \mapsto 1 \quad , \ \tau \mapsto 1 \\
\rho_1 &: \sigma \mapsto 1 \quad , \ \tau \mapsto -1 \\
\rho_2 &: \sigma \mapsto -1 \ , \ \tau \mapsto 1 \\
\rho_3 &: \sigma \mapsto -1 \ , \ \tau \mapsto -1
\end{aligned}
$$

が D_{2n} の 1 次表現を誘導する．

n が奇数のとき，

$$D_{2n}/D(D_{2n}) = \langle \bar{\tau} \rangle \cong C_2$$

ある．従って，

$$
\begin{aligned}
1_{D_{2n}} &: \sigma \mapsto 1 \quad , \ \tau \mapsto 1 \\
\rho_1 &: \sigma \mapsto 1 \quad , \ \tau \mapsto -1
\end{aligned}
$$

が D_{2n} の 1 次表現を誘導する．

次に，2 次以上の既約表現を与えよう．各整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$R_k : \sigma \mapsto \begin{bmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{bmatrix} \ , \ \tau \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と定める．ここで，

$$\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$$

である．このとき，

$$
\begin{gathered}
\begin{bmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{bmatrix}^{-1}
\end{gathered}
$$

であるので，これによって表現 $R_k : D_{2n} \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ が得られる．

各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して，χ_k を R_k の指標とする．整数 $k, k' \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\chi_k = \chi_{k'} \quad \Leftrightarrow \quad k \equiv \pm k' \pmod{n}$$

である．

また，

$$\begin{aligned}
\langle \chi_k, \chi_k \rangle &= \frac{1}{2n} \sum_{x \in D_{2n}} \chi_k(x) \overline{\chi_k(x)} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_k(\sigma^i) \overline{\chi_k(\sigma^i)} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \omega^{ik} + \omega^{-ik} + 1) \\
&= \frac{1}{2n} \left(2n + \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ik} + \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{-ik} \right) \\
&= \frac{1}{2n} \left(2n + 2\mathrm{Re} \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ik} \right)
\end{aligned}$$

となる．ここで，n が偶数で $k \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$ でないときおよびそのときに限り，

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ik} = 0$$

であるので，

$$\langle \chi_k, \chi_k \rangle = 1$$

となり，R_k は既約表現になる．

以上のことから，n が偶数のとき，互いに同型でない $\frac{n}{2} + 3$ 個の既約表現

$$1_{D_{2n}}, \rho_1, \rho_2, \rho_3, R_k \left(k = 1, ..., \frac{n}{2} - 1 \right)$$

が得られ，n が奇数のとき，互いに同型でない $\frac{n-1}{2} + 2$ 個の既約表現

$$1_{D_{2n}}, \rho_1, R_k \left(k = 1, ..., \frac{n-1}{2} \right)$$

が得られる．有限群の互いに同型でない既約表現の数は G の共役類の数に等しいので，これらが 1 つの個数最大の組を与えている．

この表現による指標表は，n が偶数，奇数のとき，それぞれ次のようになる．

	1	$\sigma^i\left(i=1,...,\frac{n}{2}\right)$	τ	$\sigma\tau$
$1_{D_{2n}}$	1	1	1	1
ρ_1	1	1	-1	-1
ρ_2	1	-1	1	-1
ρ_3	1	-1	-1	1
$R_k\left(k=1,...,\frac{n}{2}-1\right)$	1	$\omega^{ik}+\omega^{-ik}$	0	0

	1	$\sigma^i\left(i=1,...,\frac{n}{2}\right)$	τ
$1_{D_{2n}}$	1	1	1
ρ_1	1	1	-1
$R_k\left(k=1,...,\frac{n}{2}-1\right)$	1	$\omega^{ik}+\omega^{-ik}$	0

2　一般4元数群 Q_{4m} の既約表現

ゼミで発表してから書きます．

参考文献

[近藤] 近藤武, 『群論 I, II, III』, 岩波書店, 1967.

[雪江] 雪江明彦, 『代数学 1 群論入門』, 日本評論社, 2010.