連続関数のなすBanach環

いーふ　(@y_e_af)

2016年12月4日　更新

記号

以下，X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする．$C(X)$ で X 上の複素数値連続関数の全体を表わす．$f \in C(X)$ に対して，f の上限ノルムを

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

で表わす．このとき，$C(X)$ は単位的可換 Banach 環になる．

1　Uniform Algebra の Boundary(11月12日)

定義 1.1

$A \subset C(X)$ は次の 3 つの条件を満たすとき，X 上の **uniform algebra** であるという．

(1)　A は $C(X)$ は $\|\cdot\|_\infty$ に関して閉な部分多元環である，

(2)　$\forall x, y \in X \ \ (x \neq y) \ \exists f \in A$ s.t. $f(x) \neq f(y)$,

(3)　$1 \in A$.

今定義した uniform algebra は，Weierstrass の二重級数定理を含む正則関数のもつ特徴的なよい定理を抽出して得られた新しい概念である．これは正則関数のもつ性質を多く受け継いでいる．

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ とする．$A(\mathbb{D})$ で $\mathbb{D}$ の内部で正則かつ $\mathbb{D}$ 上連続な関数の全体とする．このとき $\mathbb{D}$ の境界 $\partial\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ はどのような役割をもっているだろうか．最大絶対値の原理から $A(\mathbb{D})$ の任意の関数は $\mathbb{D}$ の境界 $\partial\mathbb{D}$ で最大絶対値をとる．すなわち，

$$\forall f \in A(\mathbb{D}) \ \exists z \in \partial\mathbb{D} \ \text{ s.t. } |f(z)| = \|f\|_\infty$$

である．正則関数では Cauchy の積分表示や Poisson の積分表示など境界に沿った積分で領域内部の情報が調べられた．そのような文脈を「よい定理は，新たな定義となる」の法則を用いて uniform algebra に移植しよう．

定義 1.2
A を X 上の uniform algebra とする．部分集合 $\Gamma \subset X$ が次の条件を満たすとき，Γ は A の**境界** (boundary) であるという:

$$\forall f \in A \ \exists x \in \Gamma \ \text{ s.t. } |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

命題 1.3
A を X 上の uniform algebra とし，Γ を A の境界とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $f(x) = g(x)$ $(\forall x \in \Gamma)$ ならば，$f = g$ である．

(2) 写像 $A \to A|_\Gamma := \{f|_\Gamma : f \in A\}$; $f \mapsto f|_\Gamma$ は等距離な $\mathbb{C}$-代数の同型である．

証明
(1) $f - g$ が Γ 上で恒等的に 0 になるので $f - g$ の X 上での最大絶対値は 0 である．よって，境界の定義から $f = g$ となる．
(2) 全射性は明らかであり，単射性は (1) である．この写像が $\mathbb{C}$-線型であること，および，乗法的であることも明らか．等距離写像であることは境界の定義から明らか．

□

A を X 上の uniform algebra とし $\Gamma \subset X$ を A の境界とする．Γ が閉集合であるとき，Γ 自身コンパクト Hausdorff 空間になり $A|_\Gamma$ は Γ 上の uniform algebra になる．さらに，上のことから A と $A|_\Gamma$ は Banach 環として同型であるので，任意の有界線型汎関数 (連続な線型写像)$T : A \to \mathbb{C}$ は自然に $T : A|\Gamma \to \mathbb{C}$ と同一視される．ここで，Riesz-Markov-Kakutani の定理 [1] から，線型汎関数 $T : A|_\Gamma \to \mathbb{C}$ は Γ 上の正則複素 Borel 測度 μ によって

$$T(f|_\Gamma) = \int_\Gamma (f|_\Gamma) d\mu$$

と表現される．従って，

$$Tf = \int_\Gamma f d\mu$$

と $T : A \to \mathbb{C}$ は境界上の積分で表現される．特に，$x \in X$ をとり $Tf = f(x)$ とすると，

$$f(x) = \int_\Gamma f d\mu$$

となり，これが Cauchy の積分表示などの類似になっていることがわかる．

[1] 測度に関する議論は [10] が詳しい．

線型代数から少し準備をする．

定義 1.4
V を $\mathbb{C}$ 上の線型空間とする．

(1) $C \subset V$ が
$$(1-t)x + ty \in C \ \ (\forall x, y \in C, \forall t \in (0,1))$$
を満たすとき，C は**凸** (convex) であるという．

(2) $C \subset V$ を凸集合とする．$x \in C$ が
$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \ \ (y, z \in C) \Rightarrow x = y = z$$
を満たすとき，x は C の**端点** (extreme point) であるという．C の端点の全体を $\mathrm{ext}(C)$ で表わす．

これらに関して次は基本的な命題である．

命題 1.5
V_1, V_2 を $\mathbb{C}$ 上の線型空間とし，$T : V_1 \to V_2$ を実線型写像とする．

(1) $C \subset V_1$ が凸ならば，$T(C)$ も凸である．

(2) $C \subset V_1$ が凸であり，$T : V_1 \to V_2$ が単射であるとき，$T(\mathrm{ext}(C)) = \mathrm{ext}(T(C))$ である．すなわち，T は全単射 $T|_{\mathrm{ext}(C)} : \mathrm{ext}(C) \to \mathrm{ext}(T(C))$ を誘導する．

証明
(1) 任意に $Tx, Ty \in T(C)$ をとる．このとき，任意の $t \in (0,1)$ に対して，$(1-t)x+ty \in C$ であり，
$$(1-t)Tx + tTy = T((1-t)x + ty) \in T(C)$$
であるので，$T(C)$ は凸である．
(2) 任意の $x, y, z \in C$ に対して，T の単射性から，
$$Tx = \frac{1}{2}Ty + \frac{1}{2}Tz \ \ \Leftrightarrow \ \ x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$
である．よって，x が C の端点であることと Tx が $T(C)$ の端点であることは同値である．よって，全単射 $T|_{\mathrm{ext}}(C) : \mathrm{ext}(C) \to \mathrm{ext}(T(C))$ を得る．特に，$T(\mathrm{ext}(C)) = \mathrm{ext}(T(C))$ である．

□

線型空間が同時に Hausdorff 空間であり線型空間の演算がその位相に関して連続であるようなものを**位相線型空間** (topological linear space) という．位相線型空間で原点の (よって各点の) 基本近傍系として凸集合からなるようなものを取れるとき，その空間は**局所凸空間** (locally convex space) と呼ばれる．例えば，ノルム空間は局所凸空間である．

次の定理は，線型空間の凸集合はある局所凸位相に関してコンパクトならば extreme point から復元される，すなわち，extreme point の存在を示している．

定理 1.6 (Krein-Milman [7])
E を局所凸空間とする．$C \subset E$ がコンパクト凸集合ならば，

$$C = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(C))$$

である．ここで，$\overline{\mathrm{co}}$ は閉凸包 (その集合を含む最小の閉凸集合) である．

uniform algebra の話に戻ろう．

定義 1.7
A を X 上の uniform algebra とし，$x \in X$ とする．

(1) $\varepsilon_x : A \to \mathbb{C}$; $f \mapsto f(x)$ を x における **evaluation** という．

(2) $K(A) := \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| = 1 = \varphi(1)\}$ とおき，これを A の**台空間** (carrier space) という．

注意
関数解析 [2] に関するいくつかの記号や概念について確認する．

A^* は A の (位相的) 双対である．すなわち，A から $\mathbb{C}$ への線型写像で連続なもの，すなわち，連続な線型汎関数の全体である．線形汎関数 $\varphi : A \to \mathbb{C}$ に対して，φ のノルム $\|\varphi\|$ は，

$$\|\varphi\| := \sup_{f \in A \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_\infty}$$

で定義される．この $\|\varphi\|$ は φ によってベクトルの大きさがどれだけ大きくなるかを測っている量である．$\|\varphi\| < \infty$ であるとき φ は**有界** (bounded) であるという．これは φ が連続であることと同値である．

A^* は，各点での和およびスカラー倍によって $\mathbb{C}$ 上の線型空間になる．次の命題の (2) では，$K(A)$ が $\mathbb{C}$ 上の線型空間 A^* の凸集合になっているという意味である．

[2] 関数解析については [5] が詳しい．

命題 1.8
A を X 上の uniform algebra とする．

(1) $\varepsilon_x \in K(A)$ $(\forall x \in X)$ である．

(2) $K(A)$ は凸である．

証明
(1) $\varepsilon_x(1) = 1$ は明らかである．また，このことから

$$1 \leq \|\varepsilon_x\| = \sup_{f \in A \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} \leq 1$$

であるので $\varepsilon_x \in K(A)$ である．
(2) 任意に $\varphi, \psi \in K(A)$ をとる．各 $0 < t < 1$ に対して $(1-t)\varphi + t\psi \in K(A)$ が上とまったく同様な議論で示せる．よって，$K(A)$ は凸である．

□

定義 1.9
A を X 上の uniform algebra とする．

$$\mathrm{Ch}\, A := \{x \in X : \varepsilon_x \in \mathrm{ext}(K(A))\}$$

とおき，これを A の **Choquet 境界** (Choquet boundary) という．

定理 1.10 (Bauer)
A を X 上の uniform algebra とする．

$$\forall \varphi \in \mathrm{ext}(K(A))\ \exists x \in \mathrm{Ch}\, A \ \text{ s.t. } \ \varphi = \varepsilon_x$$

である．

Bauer の定理を用いると次が示せる．

定理 1.11
A を X 上の uniform algebra とする．A の Choquet 境界は A の境界である．

Linear Preserver Problems は，Banach 環から Banach 環への線型写像である性質 (距離，元の可逆性など) を保存するものを決定する問題である．ここでは写像の決定まではせず他に保存するものを引き出す例を挙げよう．

定理 1.12
A, B をそれぞれ X, Y 上の uniform algebra とする．$T : A \to B$ を全射等距離複素線型写像で $T(1) = 1$ とする．このとき，T は乗法的である．

証明
任意に $f, g \in A$ をとる．$T(fg) = T(f)T(g)$ を示すには，

$$T(fg)(y) = T(f)(y)T(g)(y) \ \ (\forall y \in \mathrm{Ch}\, B)$$

を示せばよい．
$T : A \to B$ は全射等距離複素線型写像であるので，T の双対写像

$$T^* : B^* \to A^* ; \varphi \mapsto \varphi \circ T$$

も全射等距離複素線型写像である．今，$T(1) = 1$ の仮定と合わせて全単射

$$T^*|_{K(B)} : K(B) \to K(A)$$

を得る．また，これから全単射

$$T^*|_{\mathrm{ext}(K(B))} : \mathrm{ext}(K(B)) \to \mathrm{ext}(K(A))$$

を得る．
任意に $y \in \mathrm{Ch}\, B$ をとる．$\varepsilon_y \in \mathrm{ext}(K(B))$ であるので Bauer の定理より，

$$\exists x \in \mathrm{Ch}\, A \ \text{ s.t. } \ T^*(\varepsilon_y) = \varepsilon_x$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
T(fg)(y) &= \varepsilon_y(T(fg)) \\
&= T^*(\varepsilon_y)(fg) \\
&= \varepsilon_x(fg) \\
&= (fg)(x) \\
&= f(x)g(x) \\
&= \varepsilon_x(f)\varepsilon_x(g) \\
&= T^*(\varepsilon_y)(f)T^*(\varepsilon_y)(g) \\
&= \varepsilon_y(T(f))\varepsilon_y(T(g)) \\
&= T(f)(y)T(g)(y)
\end{aligned}$$

となる．故に，T は乗法的である．

□

注意

実はこのような写像の形は Choquet 境界上で完全に決定できる．実際，この T は次のようになっている:

> 同相写像 $\varphi : \mathrm{Ch}\, B \to \mathrm{Ch}\, A$ および $|\alpha(y)| = 1$ $(\forall y \in \mathrm{Ch}\, B)$ である $\alpha \in B$ が存在して，
> $$T(f)(y) = \alpha(y) f(\varphi(y)) \ \ (\forall f \in A, \forall y \in \mathrm{Ch}\, B)$$
> と書ける．

このような写像を**荷重合成作用素** (weighted composition operator) という．また，複素線型の仮定を弱めても荷重合成作用素に似た形になる．

連続関数のなす Banach 環上の等距離写像を決定する問題において，Choquet 境界は重要な役割を果たす．実際，関数の環の間の等距離写像を与えると Choquet 境界の間の同相写像が誘導される，といった現象がさまざまな場合に起こる．従って，Choquet 境界がどのような形をしているかを調べる必要がある．そのためには，台空間の端点を決定する必要があるが，それはノルムや点の分離性などに大きく依存しており一番大きな困難である．

2 BishopのAntisymmetric Decomposition(12月11日)

領域上の正則関数が実数値のみをとるとき，その関数は必ず定数関数になる．この現象は連結集合上の正則関数についての特徴的な性質である．これを「よい定理は，新たな定義となる」の法則から uniform algebra に一般化しよう．

定義 2.1
A を X 上の uniform algebra とし，$K \subset X$ とする．

$$f \in A \text{ が } K \text{ 上実数値} \quad \Rightarrow \quad f \text{ は } K \text{ 上定数}$$

であるとき，K は **A-antisymmetric set** であるという．また，X が A-antisymmetric set であるとき，A は **antisymmetric algebra** であるという．

命題 2.2
A を X 上の uniform algebra とする．このとき，次が成り立つ．

(1) X の 1 点部分集合 $\{x\}$ は A-antisymmetric set である．

(2) $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A-antisymmetric set の族で $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \neq \emptyset$ を満たすならば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ も A-antisymmetric set である．

(3) (包含関係に関して) 極大な A-antisymmetric set は X の閉集合である．

(4) K_1, K_2 が極大な A-antisymmetric set ならば，$K_1 = K_2$ であるか $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ である．

証明
(1) 明らか．
(2) $f \in A$ が $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ 上で実数値であると仮定する．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，f は K_λ 上実数値である．$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ をとる．仮定より，K_λ は A-antisymmetric set であるので，f は各 K_λ 上で定数でその値は $f(x)$ である．故に，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ 上で定数となる．
(3) K が A-antisymmetric set であるので，閉包 $\overline{K}$ も A-antisymmetric set である．よって，極大性から $K = \overline{K}$ となり，K は閉集合である．
(4) (2) から従う．

□

定理 2.3 (Bishop [3])
A を X 上の uniform algebra とし，$I \subset A$ を閉イデアルとする．$\mathcal{K}$ を極大な A-antisymmetric set の全体とする．このとき，$\mathcal{K}$ は X の pairwize disjoint な閉被覆で次が成り立つ．

(1) $f \in C(X)$ かつ $f|_K \in I|_K \ (\forall K \in \mathcal{K}) \ \Rightarrow \ f \in I$,

(2) 各 $K \in \mathcal{K}$ に対して，$I|_K$ は $C(K)$ の閉集合．

ここでは，測度論および A-peak set に関する性質などの準備が必要になるので証明は省略するが，例えば [4]，[8] または [12] が詳しい．

この Bishop の定理は次の Stone-Weierstrass の定理の一般化になっている．

系 2.4 (Stone-Weierstrass)
A を X 上の uniform algebra とする．このとき，

$$\bar{f} \in A \ (\forall f \in A) \ \Rightarrow \ A = C(X)$$

である．

証明
極大な A-antisymmetric set が 1 点集合になることを示そう．任意の $x, y \in X$ に対して，

$$\exists f \in A \ \text{ s.t. } \ f(x) \neq f(y)$$

である．この f を実部と虚部に $f = u + iv$ と分けると，仮定より，

$$u = \frac{f + \bar{f}}{2}, \ \ v = \frac{f - \bar{f}}{2i} \in A$$

である．f のとり方から，$u(x) \neq u(y)$ または $v(x) \neq v(y)$ である．従って，任意の 2 点に対して，その 2 点を分離する A の実数値関数が存在するので，極大な A-antisymmetric set は 1 点集合である．

上のことから，$\mathcal{K}$ を極大な A-antisymmetric set の全体とすると，

$$\mathcal{K} = \{\{x\} : x \in X\}$$

となる．任意に $f \in C(X)$ をとる．$1 \in A$ より，任意の $x \in X$ に対して，

$$f|_{\{x\}} \in A|_{\{x\}}$$

となり，Bishop の定理の (1) より，$f \in A$ となる．故に，$A = C(X)$ である．

□

参考文献

[1] J. Araujo - J. J. Font, "Linear isometries between subspaces of continuous functions", Trans. Amer. Math. Soc., **396** (1997), 413-428.

[2] M. F. Atiyah - I. G. MacDonald, "可換代数入門 (Introduction to Commutative Algebra)", 共立出版, 2006.

[3] E. Bishop, "A generalization of the Stone-Weierstrass Theorem", Pac. J. Math. **11** (1961), 777-783.

[4] R. B. Burckel, "Characterizations of C(X) among its Subalgebras", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics volume 6, Marcel Dekker, 1972.

[5] J. B. Conway, "A Course in Functional Analysis", 2nd Edition, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer, 1990.

[6] K. deLeeuw - W. Rudin - J, Wermer, "The isometries of some function spaces", Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 694-698.

[7] M. G. Krein - D. P. Milman, "On extreme points of regular convex sets", Studia Math. **9** (1940), 133-137.

[8] G. M. Leibowitz, "Lectures on Complex Function Algebras", Scott, Foreman and Company, 1970.

[9] 宮島 静雄, "関数解析", 横浜図書, 2005.

[10] W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1987.

[11] 竹之内 脩 - 阪井 章 - 貴志 一男 - 神保 敏弥, "関数環", 数理科学シリーズ 8, 培風館, 1977.

[12] 和田 淳蔵, ノルム環, 共立講座 現代の数学, 共立出版, 1969.