元が正整数で割れるAbel群

いーふ (@y_e_af)

2016年7月3日

Twitterの投票機能を用いて，2週にわたって群論に関する問題を出してみた．今回は，Abel群の話である．予備知識としては，自由Abel群(自由$\mathbb{Z}$-加群)である．

1 問題

問題 1.1

GをAbel群としAをその部分群とする．任意の正整数nと任意の元$a \in A$に対して，

$$\exists x \in A \text{ s.t. } x^n = a$$

であると仮定する．このとき，AはGの直積因子，すなわち，Gの部分群Bで$G = A \times B$となるものが存在する．

問題 1.2

任意のAbel群Gは，任意の正整数nと任意の元$a \in A$に対して，

$$\exists x \in A \text{ s.t. } x^n = a$$

であるようなあるAbel群Aの部分群である．

ちなみに，投票結果は，

	問題 1	問題 2
本当	19%	28%
わからないけど本当っぽい	30%	16%
わからないけど嘘っぽい	24%	36%
嘘	27%	20%

となっている．答えはどちらも真である．

今回は，この性質をもつ Abel 群の一般論についての話である．以下，演算を加法の形で書くことにする．よって，例えば，上の問題における式

$$x^n = a$$

は

$$nx = a$$

のようになる．

2　可除群

以下，$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とする．直積と言ったら非制限直積を意味するものとして，制限直積のことを直和という．これは，有限個の場合は気にする必要がない．

定義 2.1
群 A が条件

(1) A は Abel 群である，

(2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a \in A\ \exists x \in A$ s.t. $nx = a$.

を満たすとき，A は**可除群**であるという．

つまり今回の問題は，Abel 群の可除部分群が直積因子になるか，また，Abel 群は可除群に埋め込めるか，という問題である．まず，基本的な性質を見よう．

補題 2.2
可除群に関して，次が成り立つ．

(1) A が可除群ならば，任意の部分群 N に関して A/N は可除群である．

(2) $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が可除群の族ならば，直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ および，直和 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ はまた可除群である．

(3) G が可除群で A が G の直和因子ならば，A は可除群である．

証明
(1)A を可除群とし，N を A の部分群とする．任意の $a + N \in A/N$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，$nx = a$ となる $x \in A$ をとると，

$$n(x + N) = nx + N = a + N$$

となるので，A/N も可除群である．
(2)$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を可除群の族とする．

$$A := \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda,\ \ A_0 := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

とおく．任意に $a = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．このとき，任意に $n \in \mathbb{N}$ をとり固定する．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，

$$\exists x_\lambda \in A_\lambda \ \text{ s.t. } \ nx_\lambda = a_\lambda$$

である．$x := (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とおくと，$nx = a$ である．従って，A は可除群である．

また，$a \in A_0$ のときは，$a_\lambda = 0$ となる $\lambda \in \Lambda$ に対しては $x_\lambda = 0$ ととれるので，A_0 も可除群である．(3)$G = A \oplus B$ とする．G は可除群であるので，任意の $a \in A$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\exists a_0 \in A \ \ \exists b_0 \in B \ \text{ s.t. } \ n(a_0 + b_0) = a$$

である．このとき，$nb_0 = a - na_0 \in A$ であるので，$A \cap B = \{0\}$ より $nb_0 = 0$ である．従って，

$$na_0 = n(a_0 + b_0) = a$$

となる．

□

例 2.3
(1) 有理数の加法群 $\mathbb{Q}$ は可除群である．また，$\mathbb{Q}$ の任意個の直和は可除群であるので，$\mathbb{Q}$ 上の線型空間を加法群と見たものは可除群である．従って，標数 0 の体の加法群は可除群である．
(2) 代数閉体の乗法群は可除群である．代数方程式 $X^n = a$ が解をもつからである．

1.1 の証明

$\mathcal{F}$ を G の部分群 H で $H \cap A = \{0\}$ であるようなものの族とする．このとき，$\mathcal{F}$ は包含関係によって順序集合になる．$\mathcal{F}_0$ を $\mathcal{F}$ の全順序部分集合とする．このとき，

$$H_0 = \bigcup_{H\in\mathcal{F}_0} H$$

とおくと，H_0 は $\mathcal{F}_0$ の上界になる．よって，$\mathcal{F}$ は帰納的順序集合となり，Zorn の補題より $\mathcal{F}$ は極大元をもつ．$\mathcal{F}$ の極大元の 1 つを B とする．

まず，この B は G の部分群であり $A \cap B = \{0\}$ である．従って，$G = A + B$ を示せば $G = A \oplus B$，すなわち，A が直和因子であることが従う．

$G \neq A+B$ であると仮定する．このとき，$g \in G \setminus (A+B)$ をとる．このとき，

$$(A+B) \cap \langle g \rangle \neq \{0\}$$

である．実際，$(A+B) \cap \langle g \rangle = \{0\}$ ならば，$A \cap \langle g \rangle = \{0\}$ であるので $A \cap (B + \langle g \rangle) = \{0\}$ となる．一方，$g \notin B$ であるので $B \subsetneqq B + \langle g \rangle$ となり，B の極大性に矛盾する．故に，$(A+B) \cap \langle g \rangle \neq \{0\}$ である．

$n \in \mathbb{N}$ を $ng \in A+B \setminus \{0\}$ となる最小のものとする．このとき，$n \geq 2$ である．n を素因数分解し $n = pm (p : 素数, m \in \mathbb{N})$ とすると，n の最小性から $mg \notin A+B$ であり $p(mg) \in A+B$ となる．従って，mg をあらためて g とすることで，n を素数 p であると仮定してよい．

今，

$$pg = a + b$$

となる $a \in A, b \in B$ をとる．このとき，

$$\exists a_0 \in A \ \text{ s.t. } \ pa_0 = a$$

である．$g_0 = g - a_0$ とおくと，

$$pg_0 = pg - pa_0 = b \in B$$

となる．また，$g_0 \notin A+B$ である．ここで，G の部分群 $B_0 := \langle g_0, B \rangle$ の元は

$$kg_0 + b_0 \ \ (0 \leq k \leq p-1, b_0 \in B)$$

の形に表わせる．

$A \cap B_0 \neq \{0\}$ と仮定しても $A \cap B_0 = \{0\}$ と仮定しても矛盾が生じることを示そう．

まず，$A \cap B_0 \neq \{0\}$ と仮定する．このとき，$a_1 \in A \setminus \{0\}$ で

$$a_1 = kg_0 + b_0 \ \ (0 \leq k \leq p-1, b_0 \in B)$$

の形の元が存在する．$A \cap B = \{0\}$ より $k \neq 0$ である．また，k と p は互いに素，すなわち，k と p の最大公約数は 1 であるので，

$$\exists s, t \in \mathbb{Z} \ \text{ s.t. } \ 1 = sk + tp$$

である．$pg_0 \in B$ より，

$$g_0 = s(kg_0) + t(pg_0) = sa_1 - sb_0 + t(pg_0) \in A+B$$

となるが，これは $g_0 \notin A+B$ に矛盾する．

次に，$A \cap B_0 = \{0\}$ と仮定する．このとき，$g_0 \notin A+B$ であるので $g_0 \notin B$ である．よって，$B \subsetneqq B_0$ となり B の極大性に矛盾する．

以上より，$G \neq A+B$ の仮定が誤りであり $G = A+B$，すなわち，$G = A+B$ となる．

□

1.2 の証明

G を任意の Abel 群とする．G に対して，自由 Abel 群 $F = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}$ と F の部分群 N で

$$G \cong F/N$$

であるものが存在する．ここで自然に，F を

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Q}$$

に埋め込む．このとき，E/N は $G = F/N$ を含む可除群である．

□

問題 1.1 のある意味での逆が問題 1.2 から従う．

定理 2.4

Abel 群 A が A を部分群として含む任意の Abel 群の直和因子ならば，A は可除群である．

証明

問題 1.2 と補題 2.2(3) より従う．

□

独り言のような何か

今回は可除群の問題でした．と偉そうに書いてはいるが，実際は問題 1.1 を作った段階では自分でも真偽がわからなくて，こんな話あったなー，程度のうっすらした記憶で出した問題です．後々ノートや本をひっくり返してみてみたら，楽しそうな話だったのでもう少し問題出そう，と思った次第です．

最近はいいことがなくて大変でした．なんというか,「Gamelin の Uniform Algebras を買おうとしたらコンビニ払い不可で，クレカもってないからアマゾンギフトカードを 6000 円分買わねば」→「部屋の外の蛍光灯が切れていてホラーゲーム感」→「外に出たら雨が降り出す」→「コンビニ着いたけど 3000 円のギフトカードが 1 枚もないし，5000 円じゃ足りないし」→「夜が明けて，Amazon 見たら値上がりして 8000 円くらいになっている」，と陰謀が渦巻いているか死んだ爺さんの「月末に金欠になるからやめておけ」というアドバイスなのか．仕方がないので，R. B. Burckel の Characterizations of $C(X)$ among its Subalgebras を中古で買いました．

参考文献

[クローシュ] ア・ゲ・クローシュ(A. G. Kurosh), (本田欣哉 校閲, 吉崎敬夫 訳), 『群論 1, 2』, 東京図書, 1960, 1961.

[近藤] 近藤武, 『群論 I, II, III』, 岩波書店, 1967.

[星] 星明考, 『群論序説』, 日本評論社, 2016.