Hilbert 空間と Riesz の表現定理

いーふ (@y_e_af)

2015 年 3 月 31 日

Abstract

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$E \subset \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ の部分集合とする．このとき，任意の E の元と直交する元の集合は E の直交補空間と呼ばれ，$E^{\perp}$ と表わす．これは実際に $\mathcal{H}$ の部分空間になる．特に，$E \subset \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ の部分空間とするとき，$(E^{\perp})^{\perp} = E$ となり，さらに任意の $x \in \mathcal{H}$ は，$x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in E, x_2 \in E^{\perp})$ と一意的に表わせる．

$f : X \to \mathbb{C}$ をノルム空間 X 上の線形汎関数とする．このとき，f の連続性は有界性と同値になり，さらにある 1 点での連続性と同値になる．ノルム空間 X 上の有界線型汎関数の全体を X^* で表わす．このとき，X^* は Banach 空間の構造が入り，X の双対空間と呼ばれる．$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とするとき，$\mathcal{H}$ と双対空間 $\mathcal{H}^*$ は Hilbert 空間として同型である．

---

1 Hilbert 空間

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とし，$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ でそれぞれ実数，複素数の体を表わものとする．$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\overline{\alpha}$ で α の複素共役を表わすものとする．線型空間といった場合，$\mathbb{C}$ 上の線型空間を表わすものとする．

Definition 1.1

$\mathcal{H}$ を線型空間とする．$x, y \in \mathcal{H}$ に対して複素数 $\langle x, y \rangle$ が定まっていて次の 2 条件を満たすとき，二項演算 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathcal{H}$ 上の**内積**という．

(I1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ $(\forall x \in \mathcal{H})$ であり，$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(I2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ $(\forall x, y \in \mathcal{H})$,

(I3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ $(\forall x, y, z \in \mathcal{H})$,

(I4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in \mathcal{H})$.

内積が定義された空間を**内積空間**という．

内積の定義から次がわかる．

(I3)'　$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \ \ (\forall x, y, z \in \mathcal{H})$,

(I4)'　$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle \ \ (\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in \mathcal{H})$.

Lemma 1.2 (Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz の不等式)
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathcal{H}$ 上の内積とする．任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して，**Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz の不等式**が成り立つ．

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

以下，単に Schwarz の不等式と呼ぶ．

Proof
$t, \theta \in \mathbb{R}$ を任意にとる．

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle te^{i\theta}x + y, te^{i\theta}x + y\rangle \\
&= t^2e^{i\theta}e^{-i\theta}\langle x, x\rangle + te^{i\theta}\langle x, y\rangle + te^{-i\theta}\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= t^2e^{i\theta}e^{-i\theta}\langle x, x\rangle + te^{i\theta}\langle x, y\rangle + \overline{e^{i\theta}\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\
&= t^2\langle x, x\rangle + 2t\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

である．ここで，θ は任意であるので $\theta = -\arg\langle x, y\rangle$ とおくと，

$$t^2\langle x, x\rangle + 2t|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \geq 0 \ \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

である．したがって，この 2 次式の判別式は 0 以下でなければいけないので，

$$|\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$$

すなわち，

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

が成り立つ．

□

Lemma 1.3
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathcal{H}$ 上の内積とする．$x \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

と定める．このとき，次の 3 条件が成り立つ．

(N1) $\|x\| \geq 0$ $(\forall x \in \mathcal{H})$ であり，$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ $(\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{H})$,

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(\forall x, y \in \mathcal{H})$.

Remark 1.4

$\|\cdot\|$ を用いると Schwarz の不等式は,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

と表わせる.

Proof

(N1) 定義から自明である.

(N2)$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\langle x, x\rangle} = |\alpha|\|x\|$.

(N3)Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + |\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

となることからわかる.

□

この補題の 3 条件を満たす $\|\cdot\|$ を**ノルム**といい，ノルムの定義された線型空間を**ノルム空間**という.

Lemma 1.5 (中線定理)

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathcal{H}$ 上の内積とし，$\|\cdot\|$ を内積から導かれたノルムとする．このとき，以下の等式が成り立つ.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Proof

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
\|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

であるので，両辺加えて,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

を得る．

□

逆に，ノルム空間において中線定理が成立しているとき，そのノルムから内積を復元できる．実際に，

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\| - \|x-y\| + i\|x+iy\| - i\|x-iy\|)$$

と定めれば，$\|x\| = \langle x, x\rangle$ を満たす内積になる．

Definition 1.6

内積空間 $\mathcal{H}$ において，任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して $d(x,y) := \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \|x-y\|$ とおけば，d は $\mathcal{H}$ 上の距離関数になる．この距離によって $\mathcal{H}$ が完備距離空間になるとき，$\mathcal{H}$ を **Hilbert 空間**と呼ぶ．

一般に，ノルム空間 X において，$d(x,y) := \|x-y\|$ とおけば d は距離関数になり，この距離に関して完備なとき X は **Banach 空間**と呼ばれる．

Example 1.7

$$\ell^2 = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \;\middle|\; x_n \in \mathbb{C} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

とおく．ℓ^2 の元を $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots)$ のように表わすことにする．$x, y \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

と定める．このとき，(実級数の)Schwarz の不等式から，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

となるので，この級数は絶対収束する．

Hilbert 空間 (Banach 空間) の部分空間を考える．線型空間として部分空間であることは自然な要請である．部分空間においても極限が十分考えられるようにしたい．よって，以下のように部分空間を定義する．

Definition 1.8

Hilbert 空間 (Banach 空間)$\mathcal{H}$ の部分集合 $E \subset \mathcal{H}$ が次の 2 条件を満たすとき，$\mathcal{H}$ の**部分空間**であるという．

(SS1) $\quad \alpha x + \beta y \in E \ \ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y \in \mathcal{H})$,

(SS2)　E は $\mathcal{H}$ の閉部分集合である．

Hilbert 空間では Euclid 空間と同様に直交性の概念が定義できる．

Definition 1.9

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathcal{H}$ 上の内積とする．$x, y \in \mathcal{H}$ が $\langle x, y \rangle = 0$ を満たすとき，x と y は**直交する**といい，$x \perp y$ で表わす．部分集合 $A, B \subset \mathcal{H}$ に対しても，$\langle x, y \rangle = 0$ $(\forall x \in A, \forall y \in B)$ であるとき，$A \perp B$ と表わす．$A = \{x\}$ の場合は，単に $x \perp B$ と表わす．

Theorem 1.10 (Pythagoras の定理)

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．$x, y \in \mathcal{H}$ が $x \perp y$ であるとき，

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

である．

Proof

$\langle x, y \rangle = 0$ であることから，

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

である．

□

Lemma 1.11

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の部分集合 $E \subset \mathcal{H}$ に対して，

$$E^{\perp} := \{x \in \mathcal{H} | x \perp E\}$$

とおく．このとき，$E^{\perp}$ は $\mathcal{H}$ の部分空間になる．

Proof

(SS1) 任意に $z \in E$ をとる．$x \perp z, y \perp z$ ならば，

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = 0 \ \ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

であるので，$\alpha x + \beta y \perp z$ となり，$\alpha x + \beta y \in E$ である．

(SS2) 任意に $z \in z$ をとる．$\{x_n\}_n \subset E^{\perp}$ を任意の収束列とし，$x_n \to x$ $(n \to \infty)$ とする．$x_n \perp z$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ である．$x \in E^{\perp}$ であることを示せばよい．Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}
|\langle x, z \rangle| &= |\langle x - x_n, z \rangle + \langle x_n, z \rangle| \\
&\leq |\langle x - x_n, z \rangle| + |\langle x_n, z \rangle| \\
&= |\langle x - x_n, z \rangle| \\
&\leq \|x - x_n\| \|z\| \\
&\to 0 \ \ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

であるので，$\langle x, z\rangle = 0$ であり，$x \in E^{\perp}$ である．したがって，$E^{\perp}$ は閉集合である．

□

Definition 1.12

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，E を $\mathcal{H}$ の部分集合とする．$E^{\perp}$ を E の**直交補空間**という．

2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ において，$X := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}, Y := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R}\}$ とおくと，X, Y は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であり，$Y = X^{\perp}$ である．さらに，任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ は，X の元と Y の元の和として一意的に表わされる．これとまったく同じことが Hilbert 空間でもできるということを示すのが次の定理である．

Theorem 1.13 (直交分解)

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$E \subset \mathcal{H}$ を部分空間とする．このとき，任意の $x \in \mathcal{H}$ は次の形に一意的に表わされる．

$$x = x_1 + x_2 \ \ (x_1 \in E, x_2 \in E^{\perp})$$

Proof

$x \in \mathcal{H}$ とする．$\delta := \inf_{y \in E} \|x - y\|$ とする．このとき，E の点列 $\{y_n\}_n$ で $\|x - y_n\| \to \delta \ \ (n \to \infty)$ となるものがとれる．この点列 $\{y_n\}_n$ が Cauchy 列であることを示す．中線定理より，

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\
&= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 + \|(x - y_m) + (x - y_n)\|^2 - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\
&= 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4\delta^2 \\
&\to 0 \ \ (n, m \to \infty)
\end{aligned}$$

であるので，$\{y_n\}_n$ は Cauchy 列である．$\mathcal{H}$ は Hilbert 空間であるので，$y_n \to x_1 \ \ (n \to \infty)$ となる $x_1 \in E$ が存在する．これに対して，

$$\|x - x_1\| = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \delta$$

である．

$x - x_1 \in E^{\perp}$ であることを示す．任意に $y \in E$ をとる．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $x_1 + ty \in E$ であるので，

$$f(t) = \|x - (x_1 + ty)\|^2 = \|x - x_1\|^2 - 2t\mathrm{Re}\,\langle x - x_1, y\rangle + t^2\|y\|^2$$

とおいたとき，f は $t=0$ で最小値 δ^2 をとらなければいけない．したがって，$f'(0)=0$ すなわち，

$$\mathrm{Re}\,\langle x-x_1, y\rangle = 0 \ \ (\forall y \in E)$$

である．また，$iy \in E$ であるので，

$$\mathrm{Im}\,\langle x-x_1, y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x-x_1, iy\rangle = 0$$

である．故に，$\langle x-x_1, y\rangle = 0$ であり，$x-x_1 \in E^\perp$ である．$x_2 = x-x_1$ とおけば，$x = x_1+x_2 \ (x_1 \in E, x_2 \in E^\perp)$ である．

最後に，一意性を示す．$x = x_1+x_2 = x_1'+x_2' \ (x_1, x_1' \in E, x_2, x_2' \in E^\perp)$ であるとする．このとき，$x_1-x_1' = x_2'-x_2$ であり，$x_1-x_1' \perp x_2'-x_2$ である．よって，

$$\|x_1-x_1'\|^2 = \langle x_1-x_1', x_1-x_1'\rangle = \langle x_1-x_1', x_2'-x_2\rangle = 0$$

であるので，$x_1-x_1' = x_2'-x_2 = 0$ である．したがって，

$$x_1 = x_1' \ \ , \ \ x_2 = x_2'$$

である．

□

Corollary 1.14

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$E \subset \mathcal{H}$ を部分空間とする．このとき，

$$(E^\perp)^\perp = E$$

である．

Proof

$E \subset (E^\perp)^\perp$ は自明である．逆の包含関係を示す．任意に $x \in (E^\perp)^\perp$ をとる．このとき，$x = x_1+x_2 \ (x_1 \in E, x_2 \in E^\perp)$ と表わせる．

$$\begin{aligned}
\|x-x_1\|^2 &= \langle x-x_1, x-x_1\rangle \\
&= \langle x-x_1, x_2\rangle \\
&= \langle x, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるので，$x = x_1 \in E$ である．よって，$(E^\perp)^\perp \subset E$ であるので，$(E^\perp)^\perp = E$ である．

□

2 Riesz の表現定理

ノルム空間 X 上の写像 $f : X \to \mathbb{C}$ が線型であるとき，すなわち，

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \ \ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y \in X)$$

であるとき，f を X 上の**線型汎関数**と呼ばれる．

Definition 2.1
ノルム空間 X 上の線型汎関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対して，

$$|f(x)| \leq M\|x\| \ \ (\forall x \in X)$$

となる数 $M > 0$ が存在するとき，線型汎関数 f は**有界**であるという．

次は，線型汎関数がもつ非常に強い性質である．

Lemma 2.2
ノルム空間 X 上の線型汎関数 $f : X \to \mathbb{C}$ に対して，次は同値である．

(1) f は有界である，

(2) f はある 1 点 $x_0 \in X$ で連続である，

(3) f は連続である．

Proof
(1)⇒(2)$\{x_n\}_n$ を 0 に収束する X の任意の点列とする．このとき，f の有界性から，

$$|f(x_n) - f(0)| = |f(x_n)| \leq M\|x_n\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

となるので，f は 0 で連続である．

(2)⇒(3)f は $x_0 \in X$ で連続であると仮定する．任意に $z \in X$ をとる．$\{z_n\}_n$ を z に収束する点列とする．このとき，$z_n - z + x_0 \to x_0 \ \ (n \to \infty)$ であるので，

$$\begin{aligned} f(z_n) &= f(z_n - z + x_0) + f(z - x_0) \\ &\to f(x_0) + f(z - x_0) = f(z) \ \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

となるので，f は連続である．

(3)⇒(1)f は 0 で連続であるので，$\varepsilon = 1$ に対して，適当に $\delta > 0$ をとって，

$$\|z\| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(z)| \leq 1$$

とできる．ここで，$0 < \delta_0 < \delta$ をとる．任意の $x \in X$ に対して $\left\| \frac{\delta_0}{\|x\|} x \right\| = \delta_0 < \delta$ であるので，

$$1 \geq \left| f\left(\frac{\delta_0}{\|x\|} x \right) \right| = \frac{\delta_0}{\|x\|} |f(x)|$$

となるので，$M := \frac{1}{\delta_0}$ とおけば $M > 0$ であり，

$$|f(x)| \leq M\|x\|$$

となる．

□

Definition 2.3

X をノルム空間とする．X 上の有界線型汎関数の集合を X^* で表わす．X^* は，各点での値の和およびスカラー倍によって，線型空間になる．さらに，$f \in X^*$ に対して，

$$\|f\| := \inf\{M \mid |f(x)| \leq M\|x\| \ \ (\forall x \in X)\}$$

とおけば $\|\cdot\|$ は X^* 上のノルムになる．このノルム空間 X^* を X の**双対空間**という．

Remark 2.4

X をノルム空間とし，$f \in X^*$ とする．$\|f\|$ の定義から，

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \ \ (\forall x \in X)$$

であることに注意する．

Lemma 2.5

X をノルム空間とし，$f \in X^*$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \end{aligned}$$

である．

Proof

$|f(x)| \leq M\|x\| \ \ (\forall x \in X)$ であるとき，

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq M \ \ (\forall x \in X \setminus \{0\})$$

であるので，$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$ である．また，

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right|$$

であることから，$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ である．

$|f(x)| \leq M\|x\|$ $(\forall x \in X)$ とし，$\lambda = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$ とおく．$\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\left\| \dfrac{x}{\|x\|+\varepsilon} \right\| < 1$ であるので，$\left| f\left(\dfrac{x}{\|x\|+\varepsilon}\right) \right| \leq \lambda$ すなわち，$|f(x)| \leq \lambda(\|x\|+\varepsilon)$ である．$\varepsilon \to 0$ とすると，$|f(x)| \leq \lambda\|x\|$ となるので，$\|f\| \leq \lambda$ である．逆に，任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| \leq M\|x\|$ であるとき，$\lambda \leq M$ であるので，$\lambda \leq \|f\|$ である．したがって，$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$ である．

□

さらに，双対空間は Banach 空間である．

Theorem 2.6

X をノルム空間とする．双対空間 X^* は Banach 空間である．

Proof

完備性を示す．$\{f_n\}_n$ を X^* の Cauchy 列とする．このとき，

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|\|x\| \to 0 \ \ (n, m \to \infty)$$

であるので，$\mathbb{C}$ の数列 $\{f_n(x)\}_n$ は Cauchy 列になる．よって，その極限を $f(x)$ とする．f が有界線型汎関数であることを示す．

各 $x \in X$ に対して，$\{f_n(x)\}_n$ は Cauchy 列であるので有界列である．よって，十分大きく $M > 0$ をとれば，$\|f_n\| \leq M$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ である．したがって，$|f_n(x)| \leq M\|x\|$ であり，$n \to \infty$ とすれば $|f(x)| \leq M\|x\|$ となり，f が有界であることがわかる．また，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と $x, y \in X$ に対して，$n \to \infty$ のとき，

$$\begin{array}{ccc} f_n(\alpha x + \beta y) & \to & f(\alpha x + \beta y) \\ \| & & \| \\ \alpha f_n(x) + \beta f_n(y) & \to & \alpha f(x) + \beta f(y) \end{array}$$

であるので，f は線型である．

最後に，$\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ を示す．$\{f_n\}_n$ は Cauchy 列であるので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \ \ (\forall n, m \geq n_0)$$

となるように，自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ がとれる．任意の $x \in X$ に対して，

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$$

である．ここで，$m \to \infty$ とすると，

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\|x\| \ \ (\forall n \geq n_0)$$

である．故に，

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon \ \ (\forall n \geq n_0)$$

である．

□

最後に，Hilbert 空間の双対空間を求める．

Theorem 2.7 (Riesz の表現定理)
$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ をその内積とする．任意の $f \in \mathcal{H}^*$ に対して，

$$f(x) = \langle x, x_0 \rangle \ \ (\forall x \in \mathcal{H})$$

となる $x_0 \in \mathcal{H}$ が一意的に定まる．さらに，

$$\|f\| = \|x_0\|$$

である．

Proof
$f = 0$ の場合は $x_0 = 0$ とすればよい．したがって，以下 $f \neq 0$ と仮定する．

(Existence)$N := \ker f = \{x \in \mathcal{H} | f(x) = 0\}$ とおく．このとき，N は $\mathcal{H}$ の部分空間であり，$N \subsetneqq \mathcal{H}$ である．$N^\perp \neq \{0\}$ であるので，$z \in N^\perp$ をとる．

$$x_0 = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$$

とおくと $x_0 \in N^\perp$ である．任意の $x \in H$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle x, x_0 \rangle &= \left\langle x - \frac{f(x)}{f(z)} z + \frac{f(x)}{f(z)} z, x_0 \right\rangle \\ &= \left\langle x - \frac{f(x)}{f(z)} z, x_0 \right\rangle + \left\langle \frac{f(x)}{f(z)} z, x_0 \right\rangle \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$$

であるので，

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in N$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
\langle x, x_0 \rangle &= \left\langle \frac{f(x)}{f(z)} z, x_0 \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{f(x)}{f(z)} z, \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z \right\rangle \\
&= \frac{f(x)}{f(z)} \frac{f(z)}{\|z\|^2} \langle z, z \rangle \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

となる．

(Uniqueness)$\langle x, x_0 \rangle = \langle x, x_0' \rangle$ $(\forall x \in \mathcal{H})$ と仮定する．このとき，$\langle x, x_0 - x_0' \rangle = 0$ $(\forall x \in \mathcal{H})$ となるので，$x_0 - x_0' = 0$ すなわち，$x_0 = x_0'$ である．

($\|f\| = \|x_0\|$)Schwarz の不等式より $|f(x)| = |\langle x, x_0 \rangle| \leq \|x\| \|x_0\|$ であるので，$\|f\| \leq \|x_0\|$ である．また，

$$\|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = |f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\|$$

であるので，$\|x_0\| \leq \|f\|$ となり，$\|f\| = \|x_0\|$ である．

□

Acknowledgment

今回の発表の構成は，主に [1] の CHAPTER I，[2] の 1 章および [8] の 5 章を参考にした．証明を作るにあたっては，主に [1]，[3] および [8] を参考にしている．

これは，3 月 31 日にすーり (@math_su_ri) 氏とセミナーについての相談をしたときに，私が血迷って発表したものに訂正加筆してなんとか読めるようにまとめたものである．はじめは，Hahn-Banach の定理か Gram-Schmidt の直交化までやろうか，とも考えていたが，私の浅学さ故にできなかったのは反省点である．また，準備不足も加わりつまずくことも多々あった．このような発表を聞いてくださったすーり氏に非常に感謝している．

参考文献

[1] John B. Conway : A Course in Functional Analysis (Second Edition), Graduate Texts in Mathematics 96, Springer.

[2] 中路 貴彦. : 正則関数のなすヒルベルト空間, 岩波数学叢書, 岩波書店.

[3] 藤田 宏, 黒田 成俊 : 関数解析 I, II, 岩波講座基礎数学 解析学 I iv, 岩波書店.

[4] 伊藤 清三 : 関数解析 III, 岩波講座基礎数学 解析学 I iv, 岩波書店.

[5] 荷見 守助 : 関数解析入門-バナッハ空間とヒルベルト空間-, 内田老鶴圃.

[6] Avner Freidman : Foundations of Modern Analysis, Dover Books on Mathematics, Dover Publications,Inc. New York.

[7] Frigyes Riesz, Béla Sz.-Nagy : Functional Analysis, Dover Books on Mathematics, Dover Publications,Inc. New York.

[8] 樋口 貞一, 瀧島 都夫, 泉池 敬司, 渡辺 公夫 : 多変数複素解析, 培風館.