ある条件を満たしながら与えられた群を正規部分群として含む群

いーふ (@y_e_af)

2016 年 6 月 19 日

Twitter の投票機能を用いて，今回も群論に関する問題を出してみた．今回はステートメントは長いが，群の常識だけで考えられる問題にした．予備知識は，準同型定理や正規化群などがわかっていれば十分である．

1 問題

問題 1.1

任意の群 N に対して，次の 2 つの条件を満足する群 G が存在する．

(1) N は G の正規部分群 (と同型) である．

(2) 任意の $\varphi \in \mathrm{Aut}(N)$ に対して，$\psi|_N = \varphi$ となる $\psi \in \mathrm{Inn}(G)$ が存在する．

ちなみに，投票結果は，

本当	24%
わからないけど本当っぽい	18%
わからないけど嘘っぽい	41%
嘘	18%

となっている．答えは珍しく「本当」である．このことを証明しよう．

証明

N を群とする．$S(N)$ で N の置換群，すなわち，N から N への全単射の全体が合成に関してなす群とする．任意の $a \in N$ に対して，

$$\hat{a} : x \mapsto ax$$

なる写像を考えると $\hat{a} \in S(N)$ である．このとき，N から $S(N)$ への写像 $\hat{\cdot} : a \mapsto \hat{a}$ は単射準同型である．よって，$\hat{\cdot}$ による N の像 $\hat{N}$ は N と同型な $S(N)$ の部分群である．$\hat{N}$ の $S(N)$ における正規化群を G とする．このとき，正規化群の定義から $N \cong \hat{N} \lhd G$ である．これで，(1) を満足する群 G が得られた．

G が (2) を満足することを示そう．$\Phi := \mathrm{Aut}(N)$ とすると，これは N の置換群 $S(N)$ の部分群である．Φ が G の部分群であることを示そう．任意に $\varphi \in \Phi$ および $a \in N$ をとる．このとき，$x \in N$ に対して，

$$\begin{aligned}(\varphi\hat{a}\varphi^{-1})(x) &= (\varphi\hat{a})(\varphi^{-1}(x)) \\ &= \varphi(a\varphi^{-1}(x)) \\ &= \varphi(a)x\end{aligned}$$

となる．従って，$\varphi\hat{a}\varphi^{-1} = \varphi(\hat{a}) \in \hat{N}$ となる．よって，$\varphi\hat{N}\varphi^{-1} \subset \hat{N}$ となり，$\Phi \subset G$ となる．今，任意の $\varphi \in \Phi$ に対して，$\psi \in \mathrm{Inn}(G)$ を

$$\psi : \sigma \mapsto \varphi\sigma\varphi^{-1}$$

と定めると，$\Psi|_{\hat{N}} = \varphi$ となり (2) が成り立つことが示された．

□

独り言のような何か

ここを書いている今はもう投票は終わっていて，要するにだらだら遊んでいたら時間が無くなりました．すいませんでした．

今回は,「本当」を答えにしました．時々，このような問題を出しておかないとそのうち皆「嘘」に入れるんじゃないか，と思って．

今回は，何がどこの元でどこからどこへの写像か意識しないと証明は難しく感じるかもしれませんし，私自身きれいに証明を組み直すのが苦手なので私の証明がわかりにくいと感じるかもしれません．その感じはだいたい正しいと思います．問題自体は割と自然に出てくるものですが，いざ考えようとすると私にとっては難しいものでした．

ネタがなくなってきたので，解析の話を．ノルム空間の間の surjective isometry が real-linear であるという有名な Mazur-Ulam の定理の周辺に最近は興味を持っていて，metric structure を見てみたいと考えています．compact space 上の uniform algebra の間の surjective map$T : A \to B$ が $\|T(f)T(g) - \lambda\| = \|fg - \lambda\|$ $(\forall f, g \in A)$ を満たすならば，T は Coquet boundary と呼ばれるものの上ではかなりきれいにかけて，weighted composition map のような形になったりと．metric structure から algebraic structure をすべて決定してしまいたいという野望があります．難しそうですな．

参考文献

[クローシュ] ア・ゲ・クローシュ(A. G. Kurosh), (本田欣哉 校閲, 吉崎敬夫 訳), 『群論 1, 2』, 東京図書, 1960, 1961.

[近藤] 近藤武, 『群論 I, II, III』, 岩波書店, 1967.

[Dixon-Mortimer] J. D. Dixon, B. Mortimer, 『Permutation Groups』, GTM, 163, Springer-Verlag, 1996.