正規部分群の正規部分群は正規部分群か？

いーふ (@y_e_af)

2016 年 6 月 5 日

Twitter の投票機能を用いて、今回も群論に関する問題を出してみたところ興味深い結果になった。今回は、「わからない」の選択肢を 2 つに分けて「わからないけど本当っぽい」と「わからないけど嘘っぽい」の 2 つに分けてみた。今回は、対称群 S_n がわかっていれば十分である。

1 問題

問題 1.1

群 G の正規部分群を N、N の正規部分群を H とする。このとき、H は G の正規部分群である。

ちなみに、投票結果は、

本当	27%
わからないけど本当っぽい	19%
わからないけど嘘っぽい	19%
嘘	35%

となっている。とりあえず、正規部分群の定義を思い出そう。

定義 1.2

G を群とする。部分群 $N \subset G$ が

$$g^{-1}hg \in N \ \ (\forall g \in G, \forall h \in N)$$

を満たすとき、N は G の**正規部分群**であるといい $N \trianglelefteq G$ で表わす。

定義から自明にわかることとしては、G 自身および自明群 $\{1\}$ は G の正規部分群である。また、G が Abel 群ならば、任意の部分群は正規である。よって、Abel 群に対しては問題 1.1 は真である。一般の場合にはどうなるか。反例は、案外簡単に見つかる。

例 1.3

4 次対称群 S_4 を考える。Krein の 4 元群

$$V_4 = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$$

は S_4 の正規部分群である。実際、V_4 は cycle-type が $(2,2)$ の元全体と単位元 1 からなるので $V_4 \lhd S_4$ である。

$$C_2 := \{1, (1\,2)(3\,4)\}$$

とおくと、これは位数 2 の巡回群になる。ここで、$[V_4, C_2] = 2$ であるので $C_2 \lhd V_4$ である。

C_2 は S_4 の正規部分群でない。実際、

$$\begin{aligned}(1\,2\,3)^{-1}(1\,2)(3\,4)(1\,2\,3) &= (1\,3\,2)(1\,2)(3\,4)(1\,2\,3)\\ &= (1\,3)(2\,4) \notin C_2\end{aligned}$$

である。

2　特性部分群

次のような概念を考える。

定義 2.1

G を群とする。部分群 $H \subset G$ が

$$\sigma(H) \subset H \ \ (\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(G))$$

を満たすとき、H は G の**特性部分群**であるという。

ここで、$\mathrm{Aut}(G)$ は G の自己同型全体がなす集合 (群) である。今、G の内部自己同型 $i_g : G \to G, x \mapsto g^{-1}xg \ \ (g \in G)$ の全体 $\mathrm{Inn}(G)$ を考えると、$\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ である。ここで、i_g に対して $i_{g^{-1}}$ が逆写像になることに注意する。これを用いると、部分群 $N \subset G$ が正規部分群であるということは、

$$i(N) \subset N \ \ (\forall i \in \mathrm{Inn}(G))$$

を満たすこと、ともいえる。このことから、特性部分群は正規部分群である。

さて、特性部分群について次が成り立つ。

定理 2.2

G 群とする。N が G の正規部分群で H が N の特性部分群ならば、H は G の正規部分群である。

証明

$N \trianglelefteq G$ より、任意の $i \in \mathrm{Inn}(G)$ に対して $i(N) \subset N$ である。よって、任意の $i \in \mathrm{Inn}(G)$ は N の自己同型写像 $i|_N : N \to N$ を誘導する。よって、H が N 特性部分群であることから、

$$i(H) = i|_N(H) \subset H \ \ (\forall i \in \mathrm{Inn}(G))$$

となり、$H \trianglelefteq G$ である。

□

独り言のような何か

私の予想では、

本当	10%
わからないけど本当っぽい	50%
わからないけど嘘っぽい	20%
嘘	20%

くらいになるかな、と思っていたのですが大外れ。投票を始めてから「本当」と「嘘」の選択肢が伸びてびっくりしました。これは Galois 理論をやっている人は気付きやすいのではないかと思います。Galois 拡大 L/K の中間体 M と Galois 群の部分群 $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ に対して、

$$M/K \text{ が Galois 拡大} \iff h \trianglelefteq \mathrm{Gal}(L/K)$$

ですから。正規拡大の正規拡大が正規拡大にならない、ということはよく目にする光景ではないでしょうか。

私はあまり定理や式を美しいとか綺麗だという感性をもっていないようで、そういった感性をもっている人はこれを見て「美しい」と思ったり「あまり美しくない」と思ったりするのでしょうか。推移的でないってことはどう感じるのでしょうか。少し気になりますね。

前回の PDF で、血を吐きながら既約表現求めている、といったようなことを書いた気がしますが、あれ楽しいですね。表現論ゼミ (旧群論ゼミ) の担当箇所に問題が 4 つあって気が滅入っていたのですが、やってみるととても楽しくて早く発表したくなりました。最近は、ユニタリ表現をやってみたいと思っているのですが、何を読めばいいのやら。とりあえず、杉浦先生の Unitary Representations and Harmonic Analysis を読もうかなとか S. Lang の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を読もうかなとか思いながら、ただただ時間だけが過ぎて何もしていない。そもそも最近は何をやりたいかもわからなくなってきた。少なくとも、群論はやりたくない。

参考文献

[近藤] 近藤武, 『群論 I, II, III』, 岩波書店, 1967.