剰余群と同型な部分群

いーふ (@y_e_af)

2016 年 6 月 12 日

Twitter の投票機能を用いて、今回も群論に関する問題を出してみた。今回は、一般常識レベルの知識があれば理解できる問題である。今回は 2 問出題したが、これは実は「$\mathbb{Z}$ で自明な反例が出る」というツイートをみて、焦って追加したためである。

1 問題

問題 1.1

群 G の正規部分群 N に対して、剰余群 G/N に同型な G の部分群が存在する。

問題 1.2

群 G の正規部分群 N に対して、剰余群 G/N に同型な G の部分群が存在する。

ちなみに、投票結果は、

	問題 1	問題 2
本当	14%	26%
わからないけど本当っぽい	19%	28%
わからないけど嘘っぽい	22%	18%
嘘	45%	28%

となっている。答えはどちらも偽である。

例 1.3

加法群 $\mathbb{Z}$ を考えれば問題 1.1 は否定的である。実際、よく知られているように $\mathbb{Z}$ の任意の部分群は $n\mathbb{Z}\,(n \in \mathbb{Z})$ の形である。すなわち、$\mathbb{Z}$ の部分群は自明群を除いてすべて無限群である。しかし、$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は位数 2 の群である。よって、$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型な $\mathbb{Z}$ の部分群は存在しない。

例 1.4

4 元数群 $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ を考える。このとき、元の位数は順番に $1, 2, 4, 4, 4, 4, 4$ である。$N := \{1, -1\}$ とすると $N \lhd Q_8$ である。このとき、剰余類群 $Q_8/N = \{N, iN, jN, kN\}$ の元の位数は $1, 2, 2, 2$ となる。Q_8 には位数 2 の元が 1 つしかないので、Q_8/N と同型な Q_8 の部分群は存在しない。よって、問題 1.2 も否定的である。

この例は、問題 1.2 の反例の中で位数最小のものである。実際、正規部分群と剰余群を同型を除いて挙げよう。自明群を 1、位数 n の巡回群を C_n、Krein の 4 元群を V_4、3 次対称群を S_3 とする。

群 G	正規部分群 $(N_1, N_2, ...)$	剰余群 $(G/N_1, G/N_2, ...)$
1	1	1
C_2	$(1, C_2)$	$(C_2, 1)$
C_3	$(1, C_3)$	$(C_3, 1)$
C_4	$(1, C_2, C_4)$	$(C_4, C_2, 1)$
V_4	$(1, C_2, V_4)$	$(V_4, C_2, 1)$
C_5	$(1, C_5)$	$(C_5, 1)$
C_6	$(1, C_2, C_3, C_6)$	$(C_6, C_3, C_2, 1)$
S_3	$(1, C_2, C_3, S_3)$	$(S_3, C_3, C_2, 1)$
C_7	$(1, C_7)$	$(C_7, 1)$

独り言のような何か

実家に帰っていたため PDF を作る時間があまりなく、よって、簡単な問題になってしまいました。次回はもう少し考え甲斐のある問題にします。

そろそろ、私が反例のある問題しか出していないことに気付かれて簡単に「嘘」を押されてしまっても困るので反例のでない問題も作ってみたいですね。と言って、高度な情報戦を。

参考文献

[近藤] 近藤武, 『群論 I, II, III』, 岩波書店, 1967.

[雪江] 雪江明彦, 『代数学 1 群論入門』, 日本評論社, 2010.