# 有限生成群の有限生成でない部分群

いーふ (@y_e_af)

2016 年 5 月 29 日

Twitter の投票機能を用いて,「本当」「嘘」「わからない」の 3 択で有限生成な群について 2 つの質問をした結果，なかなか面白い結果になったので少しまとめる．Section1 で問題とその解答を与えてある．必要な知識は群の直和程度である．Section2 は群作用をある程度知っていることを仮定して，Section1 で与えた例を簡潔に書き換える．Section3 では群論ゼミでやったことをざっくり書いたつもりが，私の知識がそもそも少ないのでほとんど何も書いてないと思ってほしい．

## 1 問題

**問題 1.1**

$n$ 元生成の群の部分群は高々$n$ 元生成である．

**問題 1.2**

有限生成な群の部分群はすべて有限生成である．

結論を先に言ってしまうと，問題 1.2 は偽よって問題 1.1 も偽である．私が群論を勉強し始めたときは，問題 1.1 は偽だろうけれど問題 1.2 は真なのではないか，と思っていた．とりあえず，問題 1.2 の反例を与える．

人工的に見えるかもしれないが，とりあえず難しい概念を使わずに反例を挙げる．

**例 1.3**

今，加法群 $\mathbb{Z}$ のコピーを可算無限個用意して，それらに整数 $i \in \mathbb{Z}$ で添え字をつけ $\mathbb{Z}_i$ と表わす．$G$ を集合として，2 つの群，$\{\mathbb{Z}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ の直和と

$\mathbb{Z}$ の直積集合を $G$ とする．

$$G := \left( \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_i \right) \times \mathbb{Z}$$

ここで群の直和とは，群の直積の部分群で有限個の成分を除いて 0 であるようなもの全体のなす群である．そして，元は

$$(..., \overset{-1}{\breve{a}}, \overset{0}{\breve{b}}, \overset{1}{\breve{c}}, ...; n)$$

のように書き，成分の上にその元が属する $\mathbb{Z}_i$ の添え字 $i$ を表わすことにする．例えば，この場合 $a \in \mathbb{Z}_{-1}, b \in \mathbb{Z}_0, c \in \mathbb{Z}_1$ である．$G$ の 2 元

$$x = (..., \overset{-1}{\breve{a}_{-1}}, \overset{0}{\breve{a}_0}, \overset{1}{\breve{a}_1}, ...; m) \ , \ y = (..., \overset{-1}{\breve{b}_{-1}}, \overset{0}{\breve{b}_0}, \overset{1}{\breve{b}_1}, ...; n)$$

に対して，

$$xy = (..., a_{-1} \overset{-1+n}{\breve{+}} b_{-1+n}, a_0 \overset{n}{\breve{+}} b_n, a_1 \overset{1+n}{\breve{+}} b_{n+1}, ...; m+n)$$

と定める．例えば，$m = 1, n = 0, a_i = 0 (\forall i \in \mathbb{Z}), b_0 = 1, b_j = 0 (\forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ であるとき，すなわち，

$$\varepsilon = (..., \overset{-1}{\breve{0}}, \overset{0}{\breve{0}}, \overset{1}{\breve{0}}, ...; 1) \ , \ e_0 = (..., \overset{-1}{\breve{0}}, \overset{0}{\breve{1}}, \overset{1}{\breve{0}}, ...; 0)$$

であるとき，

$$\varepsilon e_0 = (... \overset{-1}{\breve{0}}, \overset{0}{\breve{1}}, \overset{1}{\breve{0}}, ...; 1) \ , \ e_0 \varepsilon = (..., \overset{0}{\breve{0}}, \overset{1}{\breve{1}}, \overset{2}{\breve{0}}, ...; 1)$$

となる．

このように $G$ に演算を定めたとき，$G$ は単位元

$$1 = (... \overset{-1}{\breve{0}}, \overset{0}{\breve{0}}, \overset{1}{\breve{0}}, ...; 0)$$

をもち，$x = (..., \overset{-1}{\breve{a}_{-1}}, \overset{0}{\breve{a}_0}, \overset{1}{\breve{a}_1}, ...; m)$ に対して，逆元

$$x^{-1} = (..., \overset{-1-m}{-\breve{a}_{-1}}, \overset{-m}{-\breve{a}_0}, \overset{1-m}{-\breve{a}_1}, ...; -m)$$

をもつ非可換群になる．

$G$ は，$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Z_i$ と同型な部分群

$$\{(\ldots,\overset{-1}{\check{a}_{-1}},\overset{0}{\check{a}_0},\overset{1}{\check{a}_1},\ldots;0) : a_i \in \mathbb{Z}(\forall i \in \mathbb{Z}), \text{有限個を除いて } a_i = 0\}$$

および，$\mathbb{Z}$ と同型な部分群

$$\{(\ldots,\overset{-1}{\check{0}},\overset{0}{\check{0}},\overset{1}{\check{0}},\ldots;n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

をもつ．これらを，自然に同一視する．

各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$e_i = (\ldots,\overset{i-1}{\check{0}},\overset{i}{\check{1}},\overset{i+1}{\check{0}},\ldots;0)$$

とおく．このとき，

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Z_i = \langle \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots \rangle$$

である．定義から，これらが $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Z_i$ の生成系として極小であることがわかる．一方，$G$ においては，

$$e_i = \varepsilon^{-i} e_0 \varepsilon^i$$

であるので，

$$G = \langle \varepsilon, e_0 \rangle$$

である．このようにして，有限生成な群の有限生成でない部分群が得られた．

□

ここでは，加法群 $\mathbb{Z}$ の性質，群の直和，生成系だけの知識で書くために長々とした構成をしたが，これは正則作用による**制限輪積** $\mathbb{Z} \operatorname{wr}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ のことに他ならない．

## 2　輪積 (wreath product)

例 1.3 は煩雑で読みたくもなくなるものであった．ここでは，それを輪積というものを用いて

$$\mathbb{Z} \operatorname{wr}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

とこれだけで書こうという話である．

**定義 2.1**

$G$ を群，$\Omega$ を集合とする．写像 $\phi : G \times \Omega \to \Omega$ が条件

(1) $\phi$ は全単射，

(2) $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$ $(\forall g, h \in G, \forall x \in \Omega)$

を満たすとき，$G$ は $\Omega$ に**左から作用する**といい $G \curvearrowright \Omega$ と表わす．このとき，$\phi(g, x)$ を $g \circ x$ と書く．

また，$\phi$ が (1) と

(3) $\phi(gh, x) = \phi(h, \phi(g, x))$ $(\forall g, h \in G, \forall x \in \Omega)$

を満たすとき，$G$ は $\Omega$ に**右から作用する**といい $\Omega \curvearrowleft G$ と表わす．このとき，$\phi(g, x)$ を $x \circ g$ または $x^g$ と書く．

**例 2.2**

$G$ を群とする．このとき，$G$ の自己同型写像全体 $\mathrm{Aut}(G)$ は写像の合成

$$fg : G \ni x \mapsto g(f(x)) = (fg)(x) \in G \ \ (\forall f, g \in \mathrm{Aut}(G))$$

によって群をなし，$G$ に右から作用する．

**定義 2.3**

$N, H$ を群とし，$\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を準同型写像とする．このとき，$H$ は

$$n^h = \varphi(h)(n) \ \ (\forall n \in N, \forall h \in H)$$

によって $N$ に右から作用する．直積集合 $G = N \times H$ に積を

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1^{h_1} n_2, h_1 h_2) \ \ (\forall n_1, n_2 \in N, \forall h_1, h_2 \in H)$$

と定めると，$G$ は単位元 $(1_N, 1_H)$ をもち，$(n, h)$ に対して逆元 $(n, h)^{-1} = ((n^{-1})^{h^{-1}}, h^{-1})$ をもつ群となる．この $G$ を，$N$ と $H$ の $\varphi$ による**半直積**といい，$N \rtimes_\varphi H$ で表わす．

**例 2.4**

$\varphi(h) = \mathrm{id}_N (\forall h \in H)$ とするとき，半直積 $N \rtimes_\varphi H$ は直積 $N \times H$ に他ならない．

また，正 2 面体群

$$D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

は，巡回群 $C_n = \langle \sigma : \sigma^n = 1 \rangle, C_2 = \langle \tau : \tau^2 = 1$ の半直積

$$D_{2n} \cong C_n \rtimes_\varphi C_2$$

である．ここで，$\varphi : 1 \mapsto \mathrm{id}_{C_n}, y \mapsto \mathrm{inv}_{C_n}$ である．

**定義 2.5**

$F, H$ を群，$\Omega$ を集合とし，$\Omega \curvearrowleft H$ であるとする．$F^\Omega$ で $\Omega$ から $F$ への写像全体とする．このとき，$f, g \in F^\Omega$ に対して $fg \in F^\Omega$ を

$$(fg)(x) := f(x)g(x) \ \ (\forall x \in \Omega)$$

と定義すると $F^\Omega$ は群になる．今，$H$ は $\Omega$ に右から作用しているので $H$ の元を $\Omega$ から $\Omega$ への写像とみなせる．$f \in F^\Omega, h \in H$ に対して，$f^h \in F^\Omega$ を合成写像

$$f^h = f \circ h^{-1} : x \mapsto x \circ h^{-1} \mapsto f(x \circ h^{-1}) \ \ (\forall x \in \Omega)$$

と定めると，任意の $f \in F^\Omega, h_1, h_2 \in H$ に対して，

$$((f^{h_1})^{h_2})(x) = (f^{h_1})(x \circ h_2^{-1}) = f((x \circ h_2^{-1}) \circ h_1^{-1}) = f(x \circ (h_1 h_2)^{-1}) = f^{h_1 h_2}(x)$$

となるので，右作用 $F^\Omega \curvearrowleft H$ が得られ，これより準同型 $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(F^\Omega)$ が得られる．このとき，半直積 $F^\Omega \rtimes_\varphi H$ を $F$ と $H$ の**非制限輪積，非制限環積，非制限レス積**または**非制限リース積** (unristricted wreath product) といい，$F \ \mathrm{Wr}_\Omega \ H$ で表わす．

また，

$$N = \{ f \in F^\Omega : \text{有限個の } x \in \Omega \text{を除いて } f(x) = 1_F \}$$

とおく．このとき，$N$ は $F^\Omega$ の部分群になり，さらに $\varphi$ は準同型 $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を引き起こす．このとき，半直積 $N \rtimes_\psi H$ を $F$ と $H$ の**制限輪積，制限環積，制限レス積**または**制限リース積** (ristricted wreath product) といい，$F \ \mathrm{wr}_\Omega \ H$ で表わす．

**注意 2.6**

$F^{\Omega}$ は，$F$ を $\Omega$ の濃度の分だけコピーを用意して，それらに $x \in \Omega$ で添え字をつけ $F_x$ と表わしたものの直積，

$$\prod_{x \in \Omega} F_x$$

に他ならない．同様に，$N$ も直和，

$$\bigoplus_{x \in \Omega} F_x$$

に他ならない．

**例 2.7**

$F = H = \mathbb{Z}$，$\Omega = \mathbb{Z}$ とする．$\Omega \curvearrowleft H$，すなわち，$\mathbb{Z} \curvearrowleft \mathbb{Z}$ を ( 右 ) 正則作用

$$x \circ h = x + h \ \ (\forall h \in H = \mathbb{Z}, \forall x \in \Omega = \mathbb{Z})$$

で定義する．また，

$$N = \bigoplus_{i \in Z} Z_i$$

とするとき，$f = (..., \overset{-1}{\check{a}_{-1}}, \overset{0}{\check{a}_0}, \overset{1}{\check{a}_1}, ...) \in N$ に対して，$f^h$ の $i$ 成分が $f$ の $i - h$ 成分になるので，

$$f^h = (..., \overset{-1+h}{\check{a}_{-1}}, \overset{h}{\check{a}_0}, \overset{1+h}{\check{a}_1}, ...)$$

となる．よって，このときの $\mathbb{Z} \ \mathrm{wr}_{\mathbb{Z}} \ \mathbb{Z}$ が例 1.3 の $G$ である．

# 3　自由群

$\mathbb{Z}\ \mathrm{wr}_{\mathbb{Z}}\ \mathbb{Z}$ は非常に大きい非可換群である．それに関連して，非常に大きい非可換群は激しい性質をもっていることを紹介する．ここではほとんど何も書かない．詳しいことはすべて [近藤] に書いてある．

また，ここでは有限生成な自由群のみを考えるので，以下で $S, S_1, S_2, T$ などが出てきた場合，有限集合であるとする．また，$|S|$ で有限集合 $S$ の元の個数を表わす．

**定義 3.1**

$F$ を群，$S \subset F$ とする．$F = \langle S \rangle$ であり，普遍性の条件

(∗)　$G = \langle T \rangle$，$|T| \leq |S|$ である任意の群 $G$ を考える．任意の全射 $\varphi : S \to T$ は全射準同型 $\tilde{\varphi} : F \to G$ に延長される．

を満たすとき，$F$ は**自由生成系** $S$ 上の**自由群**であるという．

**例 3.2**

1 点集合 $\{x\}$ 上の自由群は $\mathbb{Z}$ に同型な群，すなわち，無限巡回群である．

**注意 3.3**

自由群は $|S|$ 元生成の群の中で最も大きい群 ( 最も一般的 ) な群である．定義から，$F_i$ を $S_i$ 上の自由群 $(i = 1, 2)$ とするとき，$|S_1| = |S_2|$ ならば $F_1 \cong F_2$ である．

また，$S$ 上の自由群とは，$S$ 上の語の集合 $W(S)$ を簡約表示が等しいという同値関係で割った群と自然に同型になる．よって，これは $S$ の元の間に群の定義からくる自明な関係式以外もたない群である．

**補題 3.4**

自由群 $F$ の自由生成系 $S_1, S_2$ に対して，常に $|S_1| = |S_2|$ である．

**定義 3.5**

自由群 $F$ に対して，自由生成系の元の個数 $|S|$ を自由群 $F$ の**階数**といい，$\mathrm{rank}(F)$ で表わす．

$S$ の元の間に可換性を要求する自由加群とは異なる著しい性質が次である．

**定理 3.6 (Schreier)**
$F$ を階数 $r$ の自由群とし，$H \subset F$ を $[F : H] = n < \infty$ である部分群とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $H$ は自由群である．

(2) $\mathrm{rank}(H) = 1 + n(r-1)$ である．

[近藤]§6.2，定理6.3または[クローシュ]§36，IIを見よ．特に，[クローシュ]は自由群に詳しいが読みにくい．

## 独り言のような何か

やはり，まだ群がよく見えない．イメージというかなんというか．有限生成な群 $G = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ の部分群 $H \subset G$ をとったとき，$H = \langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \rangle$ のように書けないことは見やすい．たとえば，$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (1,0), (0,1) \rangle$ の部分群 $\{(n,n) : n \in \mathbb{Z}$ を考えれば明らかである．よって，なんとなく問題 1.1 はそんなに単純な問題ではないような感じはする．一方，問題 1.2 は正直成り立ってほしい感じはする．少なくとも，はじめは私はそのように感じた．何が悪さをしてこんな状況を作っているのだろう，と考えてはいるがやはりよくわからない．群論は難しい．

正直，自由群がまだよく見えない．階数 1 なら $\mathbb{Z}$ であり，$\mathbb{Z}$ の非自明な部分群は $m\mathbb{Z}$ の形と決定できているから Schreier の定理に簡単に当てはめることができるが，そもそも $r = 1$ であるので何も面白くない．基本群なるものを勉強しなければ見えないのかな．

私はアレルギーもちというわけではないが，周りに幾何学をやっている人がいないためか，なんとなく解析や代数の勉強しかしなくなっている．自分の周りは解析の教授が多いわりに，話しかけやすい先輩で数学をやっている方が (1 人の例外を除いて) 代数の方だったのは大きな誤算だった．感謝感謝です．おかげで今は，血を吐きながら続ける楽しい指標表作りができている．

## 参考文献


[クローシュ] ア・ゲ・クローシュ(A. G. Kurosh), (本田欣哉 校閲, 吉崎敬夫 訳), 『群論 1, 2』, 東京図書, 1960, 1961.

[近藤] 近藤武, 『群論 I, II, III』, 岩波書店, 1967.

[星] 星明考, 『群論序説』, 日本評論社, 2016.

[雪江] 雪江明彦, 『代数学 1 群論入門』, 日本評論社, 2010.