# 半単純群

いーふ (@y\_e\_af)

# 必要となる知識

群 G に対して、H が G の部分群であることを  $H \leq G$  で表わす。N が G の正規部分群であることを  $N \preceq G$  で表わす。一般に、集合の間の包含関係で下にイコールがない記号を用いたときは、真なる包含関係を表わすことにする。自明群は単に 1 で表わす。集合 G の濃度は |G| で表わし、 $h \leq G$  の指数は [G:H] で表わす。 $S \subseteq G$  に対して、 $C_G(S)$  で S の G における中心化群を  $N_G(S)$  で S の G における正規化群を表わす。また、群 G に対して G の内部自己同型群を表わす。群 G に対して G の内部自己同型群を表わす。群 G に対して G の内部自己同型群を表わす。群 G に対して G の内部自己同型群を表わす。群 G に対して G に対して G の内部自己同型群を表わす。群 G が真部分群の直積に書けないとき、G は直既約であるという。 $G \neq 1$  が自明でない真部分群をもたないとき G は単純群であるという。

準同型定理,いくつかの同型定理はよく知っているものとする.特に, $H \leq G$ ,  $N \subseteq G$  であるとき, $N \cap H \subseteq H$  であり,

$$HN/N \simeq H/(N \cap H)$$

はよく用いる.

また,以下のことはよく知っているものとする.群Gに対して,

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{n-1} \trianglerighteq G_n = 1$$

なる列を正規列という. G の正規列に現れる部分群 N を G の正規列部分群といい  $N \triangleleft \triangleleft G$  で表わす.

X を群G の部分群の族とする. X の任意の部分集合が包含関係に関して極大元 (resp. 極小元) をもつとき, X は極大条件 (resp. 極小条件) を満たすという. 特に, X が部分群全体, 正規列部分群全体, 正規部分群全

体であるとき、単にGは、部分群、正規列部分群、正規部分群について極大(極小)条件を満たすという。

Gの正規列

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{n-1} \trianglerighteq G_n = 1$$

ですべての  $i \in \{1,\ldots,n\}$  に対して  $G_{i-1}$  と  $G_i$  の間に  $G_{i-1}$ ,  $G_i$  と異なる  $G_{i-1}$  の正規部分群が存在しないとき,この正規列は G の組成列であるという。G が組成列をもつとき,その任意の部分群 H は組成列をもつ。G が組成列をもつためには,G が正規列部分群について極大条件極小条件を満たすことが必要十分である。 $N \trianglelefteq G$  とする。正規列部分群について極大条件 (resp. 極小条件) を満たすためには,N および G/N が正規列部分群に関して極大条件 (resp. 極小条件) を満たすことが必要十分である。このことは,部分群について,正規部分群についてもいえる。

Gを群とする.

$$G = G_1 \times \cdots \times G_n$$

は $G_1, \ldots, G_n$  が自明でない直既約群であるとき,G の直既約分解という. 次の Krull-Schmidt の定理は非常に重要である.

### Krull-Schmidt Theorem

G を正規部分群について極大条件極小条件を満たす群とする.このとき、次が成り立つ.

- (1) G は少なくとも 1 つの直既約分解をもつ,
- (2)  $G = H_1 \times \cdots \times H_m = K_1 \times \cdots \times K_n$  が G の直既約分解であるとき,m = n であり適当な順序で  $H_1, \ldots, H_m$  と  $K_1, \ldots, K_m$  は 1 つずつ同型である.

Krull-Schmidt の定理の系である次の補題は、以降最後まで使われることになる.

# Corollary

(1) G が非可換単純群  $G_1, \ldots, G_n$  の直積ならば、直積因子  $G_1, \ldots, G_n$  は一意に定まり、G の任意の正規部分群は  $G_1, \ldots, G_n$  のうちのいく つかの直積である、

- (2)  $N_1, N_2 \triangleleft G$  が共にいくつかの非可換単純群の直積ならば、 $N_1N_2$  もいくつかの非可換単純群の直積である、
- (3) G が組成列をもつ群であるとき,G の極小正規部分群は基本 Abel 群であるか同型な非可換単純群の直積である.

# 1 交換子と完全群

### Definition 1.1

群Gの2元x,yに対して,

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

とおき、これをx,yの交換子という。また、Gの部分集合H,Kに対して、

$$[H, K] = \langle [h, k] | h \in H, k \in K \rangle$$

とおく. 特に,

$$D(G) = [G, G]$$

とおき、これをGの交換子群という。

以下, 群Gにおいて,  $x \in G$ と $\sigma \in Aut(G)$ に対して,

$$x^{\sigma} = \sigma(x)$$

で表わす. 同様に、部分集合 S に対しても、 $S^{\sigma} = \sigma(S)$  で表わす. 特に、 $y \in G$  に対して、

$$x^y = y^{-1}xy$$

と表わす.

## Proposition 1.2

Gを群とし、 $x,y,z \in G$ とする. 次が成り立つ.

- $(1) [x,y] = 1 \Leftrightarrow xy = yx,$
- (2)  $[x,y]^{-1} = [y,x]$ ,
- (3)  $[x,y]^z = [x^z, y^z]$ ,
- (4)  $[xy, z] = [x, z]^y [y, z],$
- (5)  $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$ .

### Proof

- (1)  $[x,y]=1 \Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy=1 \Leftrightarrow xy=yx$  である.
- $(2) [x,y]^{-1} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx = [y,x]$  である.

- (3)  $[x,y]^z=z^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz=z^{-1}x^{-1}zz^{-1}y^{-1}zz^{-1}xzz^{-1}yz=(x^z)^{-1}(y^z)^{-1}x^zy^z=[x^z,y^z]$  となる.
- (4)  $[xy,z] = (xy)^{-1}z^{-1}xyz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}x(zyy^{-1}z^{-1})yz = (y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzy)(y^{-1}z^{-1}yz) = [x,z]^y[y,z]$  となる.
- (5)  $[x,yz] = x^{-1}(yz)^{-1}xyz = x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz = (x^{-1}z^{-1}xz)(z^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz) = [x,z][x,y]^z$  となる.

次の補題は今後よく用いる.

# Lemma 1.3

Gを群とし、H,K < Gとする. 次が成り立つ.

- (1) [H, K] = [K, H],
- (2)  $[H, K] \subseteq G$ ,
- (3)  $H \subseteq N_G(K) \Leftrightarrow [H, K] \subseteq K$ ,
- (4)  $H, K \subseteq G \Rightarrow [H, K] \subseteq H \cap K$ ,  $[H, K] \subseteq G$ .

### Proof

- (1) 1.2(2) より,[H,K] と [K,H] の生成系は一致するので [H,K]=[K,H] である.
- $(2) h, h' \in H$  ,  $k, k' \in K$  とする. 1.2(4) より,

$$[h,k]^{h'} = [hh',k][h',k]^{-1} \in [H,K]$$
 
$$[k,h]^{k'} = [kk',h][k',h]^{-1} \in [K,H] = [H,K]$$

である. 故に,  $[H,K] \triangleleft \langle H,K \rangle$  である.

- $(3)(\Rightarrow)$   $H \subseteq N_G(K)$  ならば、任意の  $h \in H$  、  $k \in K$  に対して  $(k^{-1})^h \in K^h = K$  であるので、 $[h,k] = (k^{-1})^h k \in K$  である。故に、 $[H,K] \subseteq K$  である
- (秦)  $[H,K] \subseteq K$  と仮定する.このとき,任意の $h \in H$  , $k \in K$  に対して  $(k^{-1})^h k = [h,k] \in K$  であるので, $(k^{-1})^h \in K$  である.よって, $K^h \subseteq K$  である.故に, $H \le G$  より  $K^h = K$  となり, $h \in N_G(K)$  である.
- (4)  $H, K \subseteq G$  であると仮定する. このとき,  $H, K \subseteq G = N_G(H) = N_G(K)$  であるので,  $[H, K] \subseteq K$  ,  $[H, K] = [K, H] \subseteq H$  である. 故に,  $[H, K] \subseteq H \cap K$  である. また,  $\mathbf{1.2}(3)$  より, 任意の  $x \in G$  に対して

 $[H,K]^x = [H^x,K^x] = [H,K]$  であるので, $[H,K] \leq G$  である.

Lemma 1.4

Gを群とし、 $A,B,C \subseteq G$ とする. このとき、

$$[AB, C] = [A, C][B, C]$$
$$[A, BC] = [A, B][A, C]$$

である.

# Proof

まず,  $A, B, C \subseteq G$  であるので,  $\mathbf{1.3}(4)$  より  $[A, C], [B, C] \subseteq G$  である. 任意の  $a \in A, b \in B, c \in C$  に対して,  $\mathbf{1.2}(4)$  より,

$$[ab, c] = [a, c]^b[b, c] \in [A, C]^b[B, C] = [A, C][B, C]$$

である. よって, [A,C],  $[B,C] \subseteq G$  であることから,  $[AB,C] \subseteq [A,C][B,C]$  である. 一方, [A,C],  $[B,C] \subseteq [AB,C]$  であるので,  $[A,C][B,C] \subseteq [AB,C]$  である.

もう一方も1.2(5)を用いて同様にすればよい.

次は交換子群の最も基本的な性質である.

### Theorem 1.5

Gを群とする.次が成り立つ.

- (1)  $D(G) \leq G$ ,
- (2)  $N \subseteq G$ ,  $Z(G/N) = G/N \Leftrightarrow D(G) \subseteq N$ .

### Proof

(1)  $x, y \in G$  とする. 任意の  $\sigma \in \operatorname{Aut}(G)$  に対して,

$$[x,y]^{\sigma} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{\sigma} = (x^{\sigma})^{-1}(y^{\sigma})^{-1}x^{\sigma}y^{\sigma} = [x^{\sigma},y^{\sigma}]$$

であるので、 $D(G)^{\sigma} = D(G^{\sigma}) \subseteq D(G)$  である.

(2)  $N \triangleleft G$  とする. まず,  $x,y \in G$  に対して,

$$(xN)(yN) = (yN)(xN) \Leftrightarrow [x,y] \in N$$

であることに注意する.

- $(\Rightarrow)$  Z(G/N)=G/N ならば、任意の  $x,y\in G$  に対して [xN,yN]=[x,y]N=N であるので、 $[x,y]\in N$  である.よって, $D(G)\subseteq N$  である.
- (秦)  $D(G) \subseteq N$  であると仮定する.このとき,任意の  $x,y \in G$  に対して, $[x,y] \in N$  である.ここで, $x \in N$  とすると, $x^y \in xN = N$  となり, $N \subseteq G$  である.また,先の注意から G/N は Abel 群である.

# Corollary 1.6

Gを群とする. このとき, G/D(G) は Abel 群である.

# Proposition 1.7

Gを群とし、 $K \le H \le G$ であるとする.

$$L = \{x \in G | [x, H] \subseteq K\}$$

とおくとき,次が成り立つ.

- (1)  $L \subseteq N_G(H) \cap N_G(K)$ ,
- (2)  $L \leq G$ .

#### Proof

- (1)  $[L,H] \subseteq K \subseteq H$  であるので、 $\mathbf{1.3}(3)$  より  $L \subseteq N_G(H)$  である。また、 $[L,K] \subseteq [L,H] \subseteq K$  であるので、 $\mathbf{1.3}(3)$  より  $L \subseteq N_G(K)$  である。従って、 $L \subseteq N_G(H) \cap N_G(K)$  である。
- (2)  $x, y \in L$  とする. このとき, 任意の $h \in H$  に対して,

$$[xy^{-1}, h] = [x, h]^{y^{-1}}[y^{-1}, h]$$

である. ここで,  $y \in L \subseteq N_G(H) \cap N_G(K)$  であるので,  $y^{-1} \in N_G(H) \cap N_G(K)$  である.  $[x,h] \in K$  であるので,  $[x,h]^{y^{-1}} \in K$  である. また,  $[y^{-1},h] = (h^{-1})^{y^{-1}}h \in H \subseteq K$  である. よって,  $[xy^{-1},h] \in K$  であるので,  $[xy^{-1},H] \subseteq K$  であり,  $xy^{-1} \in L$  である.

#### Lemma 1.8

Gを群とし, $K \leq H \leq G$ であるとする. $[G,H] \subseteq K$ ならば, $H,K \trianglelefteq G$ であり, $H/K \subset Z(G/K)$ である.

# Proof

 $[G,H]\subseteq K$  であると仮定する. 1.7(1) より,  $N_G(H)=N_G(K)=G$  である. すなわち,  $H,K\unlhd G$  である.

任意に  $hK \in H/K$  をとる.このとき,任意の  $xK \in G/N$  に対して, $[G,H] \subseteq K$  であるので,

$$[xK, hK] = [x, h]K = K$$

となり、 $hK \in Z(G/K)$  である. 故に、 $H/K \subseteq Z(G/H)$  である.

# Definition 1.9

群Gのn元 $(n \ge 3)x_1, \ldots, x_n$ に対して、帰納的に

$$[x_1,\ldots,x_n] = [[x_1,\ldots,x_{n-1}],x_n]$$

と定め、これをn 階交換子という。また、G の部分集合  $S_1, \ldots, S_n$  に対して、

$$[S_1, \dots, S_n] = [[S_1, \dots, S_{n-1}], S_n]$$

と定める.

# Lemma 1.10 (Witt)

群Gの3元 $x,y,z \in G$ に対して,

$$[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1$$

が成り立つ. これを Witt の恒等式という.

## Proof

 $x, y, z \in G$  とする.

$$\begin{split} [x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x &= & [[x,y^{-1}],z]^y[[y,z^{-1}],x]^z[[z,x^{-1}],y]^x \\ &= & (y^{-1}[x,y^{-1}]^{-1}z^{-1}[x,y^{-1}]zy) \\ & (z^{-1}[y,z^{-1}]^{-1}x^{-1}[y,z^{-1}]xz) \\ & (x^{-1}[z,x^{-1}]^{-1}y^{-1}[z,x^{-1}]yx) \\ &= & (y^{-1}[y^{-1},x]z^{-1}[x,y^{-1}]zy) \\ & (z^{-1}[z^{-1},y]x^{-1}[y,z^{-1}]xz) \\ & (x^{-1}[x^{-1},z]y^{-1}[z,x^{-1}]yx) \\ &= & (y^{-1}yx^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy) \\ & (z^{-1}zy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz) \\ & (x^{-1}xz^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx) \\ &= & (y^{-1}y)(x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}) \\ & (yxy^{-1}zyz^{-1}zy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}) \\ & (zyz^{-1}xzx^{-1}xz^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1})(xzx^{-1}yx) \\ &= & (x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1})(xzx^{-1}yx) \\ &= & 1 \end{split}$$

## Lemma 1.11 (3部分群補題)

Gを群とし、 $H,K,L \leq G$  、 $N \subseteq G$ とする. このとき、

$$[H, K, L] \subset N$$
 ,  $[K, L, H] \subset N$   $\Rightarrow$   $[L, H, K] \subset N$ 

が成り立つ.

### Proof

 $x \in H, y \in K, z \in L$  とする。仮定より, $[x, y^{-1}, z] \in N$  , $[y, z^{-1}, x] \in N$  である。Witt の恒等式より, $[z, x^{-1}, y] \in N$  である。故に, $[L, H, K] = [[L, H], K] \subset N$  となる。

3部分群補題は次の形でよく使われる.

## Lemma 1.12

Gを群とし、 $H,K \leq G$ とする. このとき、次が成り立つ.

(1) 
$$[H, K, K] = 1 \Rightarrow [H, D(G)] = 1$$
,

(2) 
$$[H, K] \subseteq Z(K)$$
,  $D(K) = K \Rightarrow [H, K] = 1$ .

# Proof

(1) [H, K, K] = 1 とすると,

$$[K, H, K] = [[K, H], K]$$
  
=  $[[H, K], K]$   
=  $[H, K, K]$   
= 1

である. 3部分群補題より,

$$[H, D(K)] = [D(K), H]$$
$$= [K, K, H]$$
$$= 1$$

である.

(2)  $[H,K] \subseteq Z(K)$  かつ D(K) = K であるとする. このとき,

$$[H, K, K] = [[H, K], K]$$

$$\subseteq [Z(K), K]$$

$$= 1$$

である. 従って, (1) を用いると,

$$[H, K] = [H, D(K)] = 1$$

となる.

## Definition 1.13

群Gが

$$N \subseteq G$$
 ,  $Z(G/N) = G/N \Rightarrow G = N$ 

を満たすとき、Gは完全群であるという。

10

# Example 1.14

非可換単純群は完全群である.

# Proposition 1.15

群Gに対して、次は同値である。

- (1) G は完全群.
- (2) D(G) = G.

**Proof**  $(1) \Rightarrow (2)$  G は完全群であると仮定する. このとき, **1.6** より, G/D(G) は Abel 群である. よって, G=D(G) である.

 $(2) \Rightarrow (1)$   $N \subseteq G$  とし,Z(G/N) = G/N であるとする.このとき,**1.5** より, $G = D(G) \subseteq N$  であるので,G = N となり,G は完全群である.

П

# 2 可解群と冪零群

### Definition 2.1

Gを群とする. 正規列

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1$$

で各 $G_{i-1}/G_i$  が Abel 群であるものを、G の可解列という。可解列をもつ群を可解群という。

#### Remark 2.2

 $G_{i-1}/G_i$  が Abel 群という条件は、 $\mathbf{1.5}$  より  $D(G_{i-1}) \subseteq G_i$  と同値である.

### Definition 2.3

群 G に対して、部分群  $D_i(G)$  を帰納的に

$$D_0(G) = G$$
,  $D_i(G) = [D_{i-1}(G), D_{i-1}(G)]$   $(i = 1, 2, ...)$ 

と定める. このとき,

$$G = D_0(G) \trianglerighteq D_1(G) \trianglerighteq D_2(G) \trianglerighteq \cdots$$

である. これをGの交換子列という.

## Proposition 2.4

群Gに対して、次は同値である.

- (1) G は可解群.
- (2) ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n(G) = 1$ .

# Proof

 $(1) \Rightarrow (2)$  Gを可解群とすると可解列

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{n-1} \trianglerighteq G_n = 1$$

が存在する. このとき,  $G_i \supseteq D_i(G)$  (i = 1, ..., n) を示せば十分である. i = 0 では明らかに成り立つ. また,  $G_{i-1} \supseteq D_{i-1}(G)$  であると仮定する. **2.2** より,

$$G_i \supseteq D(G_{i-1}) \supseteq D(D_{i-1}(G)) = D_i(G)$$

である.

 $(2) \Rightarrow (1) D_n(G) = 1$  のとき, 交換子列

$$G = D_0(G) \trianglerighteq D_1(G) \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq D_{n-1}(G) \trianglerighteq D_n(G) = 1$$

は可解列である.

Lemma 2.5

Gを群とし、 $H < G, N \triangleleft G$ とする. このとき、次が成り立つ.

- (1)  $D_i(G) \supseteq D_i(H)$  (i = 0, 1, ...),
- (2)  $D_i(G/N) = D_i(G)N/N$  (i = 0, 1, ...).

Proof

(1) i=0 のときは当たり前.  $D_{i-1}(G)\supseteq D_{i-1}(H)$  であるとする. このとき,

$$D_i(G) = D(D_{i-1}(G)) \supseteq D(D_{i-1}(H)) = D_i(H)$$

である.

(2) i=0 のときは当たり前、 $D_{i-1}(G/N)=D_{i-1}(G)N/N$  であると仮定する、 $xN,yN\in D_{i-1}(G/N)$  に対して、

$$[xN, yN] = [x, y]N \in D_i(G)N/N$$

であるので,  $D_i(G/N) \subseteq D_i(G)N/N$  である。また、任意の  $[x,y] \in D_i(G), h \in N$  に対して、

$$[x,y]hN = [x,y]N = [xN,yN] \in D_i(G/N)$$

であるので、 $D_i(G/N) \supseteq D_i(G)N/N$  である.

Corollary 2.6

可解群の部分群および剰余群は可解群である.

Definition 2.7

Gを群とする. 正規列

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_{n-1} \trianglerighteq G_n = 1$$

で各iに対して $[G,G_{i-1}]\subseteq G_i$ であるものを,Gの中心列という.中心列をもつ群を冪零群という.

# Definition 2.8

群 G に対して、部分群  $K_i(G)$  を帰納的に

$$K_0(G) = G$$
,  $K_i(G) = [G, K_{i-1}(G)]$   $(i = 1, 2, ...)$ 

と定めると,

$$G = K_0(G) \supseteq K_1(G) \supseteq K_2(G) \supseteq \cdots$$

である. これを, Gの降中心列という.

また, 部分群  $Z_i(G)$  を帰納的に,

$$Z_0(G) = 1$$
,  $Z_i(G) = \{x \in G | [x, G] \subseteq Z_{i-1}(G) \ (i = 1, 2, ...) \}$ 

と定めると,

$$1 = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq \cdots$$

である. これを, Gの昇中心列という.

### Remark 2.9

1.3(4) より、
$$K_i(G) \subseteq G$$
 である.また、 $K_i(G) = [G, \ldots, G]$  である.  
1.8 より、 $Z_i(G) \subseteq G$  であり、 $Z(G/Z_{i-1}(G)) = Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$  である.

# Proposition 2.10

群Gに対して、次は同値である。

- (1) G は冪零群,
- (2) ある $m \in \mathbb{N}$ に対して $K_m(G) = 1$ ,
- (3) ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $Z_n(G) = G$ である.

### Proof

 $(1) \Rightarrow (2)$  かつ (3) G を冪零群とする. このとき,中心列

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1$$

が存在する. このとき,

$$K_i(G) \subseteq G_i$$
,  $G_{n-i} \subseteq Z_i(G)$   $(i = 0, ..., n)$ 

であることを示す. i=0のときは明らかである.  $K_{i-1}\subseteq G_{i-1}$  ,  $G_{n-(i-1)}\subseteq Z_{i-1}(G)$  であると仮定する. このとき,

$$K_i(G) = [K_{i-1}(G), G] \subseteq [G_{i-1}, G] \subseteq G_i$$

である. また,

$$[G_{n-i}, G] \subseteq G_{n-i+1} = G_{n-(i-1)} \subseteq Z_{n-(i-1)}(G)$$

であるので、 $G_{n-i} \subseteq Z_{n-1}(G)$ も成り立つ.

(2) または (3) ⇒ (1) (2) が成り立つときは  $G_i = K_i(G)$  と、(3) が成り立つときは  $G_i = Z_{n-i}(G)$  とおけば、これらが G の中心列になる.

### Remark 2.11

この証明から,

$$K_n(G) = 1 \Leftrightarrow Z_n(G) = G$$

であることがわかる.

### Definition 2.12

Gを冪零群とする. このとき,  $Z_n(G) = G$ となる n, すなわち,  $K_n(G) = 1$ となる n のうち最小のものを G の冪零クラスという.

### Lemma 2.13

Gを群とし、 $H < G, N \triangleleft G$ とする. このとき、次が成り立つ.

- (1)  $K_i(G) \supseteq K_i(H)$  (i = 0, 1, ...),
- (2)  $K_i(G/N) = K_i(G)N/N$  (i = 0, 1, ...).

#### Proof

(1) i=0 のときは当たり前.  $K_{i-1}(G)\supseteq K_{i-1}(H)$  であるとする. このとき,

$$K_i(G) = [G, K_{i-1}(G)] \supseteq [H, K_{i-1}(H)] = K_i(H)$$

である.

(2) i=0 のときは当たり前、 $K_{i-1}(G/N)=K_{i-1}(G)N/N$  であると仮定する、 $xN\in G/N, yN\in K_{i-1}(G/N)$  に対して、

$$[xN, yN] = [x, y]N \in K_i(G)N/N$$

であるので,  $K_i(G/N)\subseteq K_i(G)N/N$ である。また、任意の  $[x,y]\in K_i(G), h\in N$  に対して、

$$[x,y]hN = [x,y]N = [xN,yN] \in K_i(G/N)$$

であるので、 $K_i(G/N) \supseteq K_i(G)N/N$  である.

# Corollary 2.14

冪零クラスnの冪零群の部分群および剰余群は冪零クラスが高 $\alpha$ の冪零群である.

# たぶんもうちょっと書く!

16

# 3 半単純群と成分

### Definition 3.1

Gを群とする. Gが,

$$G = D(G)$$
 かつ  $G/Z(G)$  は単純群の直積

であるとき,Gは半単純群であるという。また,

$$G = D(G)$$
 かつ  $G/Z(G)$  は単純群

であるとき, G は準単純群であるという.

# Lemma 3.2 (Grün)

G が完全群ならば、Z(G/Z(G)) = 1 である.

### Proof

昇中心列の定義より,

$$[Z_2(G), G] \subseteq Z_1(G) = Z(G)$$

である. startangleright また, G は完全群であるので,

$$G = D(G)$$

である. よって, 1.12(2) より,

$$[Z_2(G), G] = 1$$

である. 従って,  $Z_2(G) \subseteq Z_1(G)$  である. 故に,

$$Z(G/Z(G)) = Z(G/Z_1(G))$$

$$= Z_2(G)/Z_1(G)$$

$$= 1$$

である.

### Remark 3.3

3.2 より, 準単純群, 半単純群の定義に現れる単純群は非可換単純群である. 以降, 自明群1も準単純群, 半単純群であるとする.

## Lemma 3.4

G を半単純群とし  $N \unlhd G$  であるとする.このとき,N が可解ならば, $N \subseteq Z(G)$  である.

## Proof

 $N \triangleleft G$  は可解であるとする. このとき,

$$NZ(G)/Z(G) \simeq N/(Z(G) \cap N)$$

も可解である. また,  $N \triangleleft G$  であるので,

$$NZ(G)/Z(G) \subseteq G/Z(G)$$

である。故に,非可換単純群の直積の正規部分群はいくつかの非可換単純群の直積であるが,NZ(G)/Z(G) は可解であるので,

$$NZ(G)/Z(G) = 1$$

である. すなわち,  $N \subseteq Z(G)$  である.

# まだたくさん書く!

4 Fitting部分群・一般化Fitting部分群 未完成だよ!